بسم الله الرحمن الرحيم

الإحصاءات المرتبة المعممة من توزيع وايبل الأسي والاستدلال المصاحب

إعداد
مشاعل مسعود سعود الصبحي الحربي
ماجستير في الإحصاء الرياضي – كلية العلوم التطبيقية – جامعة أم القرى

بحث مقدم لنيل درجة دكتوراه الفلسفة في العلوم
(تخصص رياضيات / إحصاء رياضي)

إشراف
أ.د/ جنات رمضان الديان
أستاذ الإحصاء الرياضي - كلية العلوم - جامعة الملك عبد العزيز

أ.د/ زينهم فكري جاهين
أستاذ الإحصاء الرياضي - كلية العلوم - جامعة الملك عبد العزيز

كلية العلوم للبنات
جامعة الملك عبد العزيز
جدة – المملكة العربية السعودية
رجب ١٤٣٢هـ - يونية ٢٠١١ م

إهـ ـ ـداء

إلى من قال ا تعالى فيهما:((وبالوالدين إحسانا)).. إلى والدي الكريمين أهدي هذه الرسالة..

فرضا ا من رضا الوالدين..

شكر و تقدير

بداية أسأل ا جل في علاه أن يعينني على أداء حق الشكر لكل من ساندني ووقف بجانبي حتى تقديم هذه الرسالة.. فيارب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي وأن أعمل صالحا ترضاه وأدخلني برحمتك في عبادك الصالحين...

وشكري بالمقام الأول لمن علمني مالم أعلم ((سبحانك لا علم لنا إلا ما علمتنا إنك أنت العليم الحكيم)) فلك الحمد ربي حمدا يليق بجلال وجهك وعظيم سلطانك وصلاة وسلاما على الرسول الأمين والنبي الكريم، سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، ومن سار على نهجه واتبع هديه إلى يوم الدين، ومن لم يشكر الناس لم يشكر ا لذا أواصل شكري لوالدي الكريمين فالحب مع التشجيع والدعاء الذي منحاني إياه وهبني حافزا قويا لكل نجاحاتي فيارب أسعدني وإياهما بتمام النعمة واكتمال الفرحة وتحقق الدعوات...والشكر كل الشكر لمشرفي الفاضلين سعادة الأستاذ الدكتور/ زينهم جاهين.. فله موفور الشكر وفائق الإمتنان إذ منحني من وقته وجهده فوق ما أستحق لأنه عالم بحق وهذا هو ديدن العلماء العظماء فجزاه ا عني كل خير وبلغه أسمى مراتب الدنيا وأعلى منازل الجنة... والشكر موصول لسعادة الدكتورة/ جنات الديان التي لم تألو جهدا في مساعدتي وتقديم العون لي والتي غمرتني بحسن التعامل وجميل الأخلاق... وأتقدم بأسمى عبارات الشكر لأستاذي الأول الذي نهلت على يديه علم الإحصاء فكان لي نعم المعلم ولا زال سعادة الأستاذ الدكتور/ أحمد أبو المجد.. أسأل ا أن يجعل جهوده معي في بداية هذا البحث في ميزان حسناته... ولا أنسى في هذه السطور تقديم أطيب معاني الشكر لكل أفراد أسرتي أخي الغالي مشعل وأخواتي الغاليات فدوى والفت وأمل وعهود على دعمهم المعنوي والنفسي طيلة فترة البحث أسأل ا أن يتم فرحتهم بي وأن يجزيهم عني خير الجزاء... والشكر موصول لخالي الغالي الدكتور/ منصور الصبحي الذي شرفني بمراجعته اللغوية لهذه الرسالة سائلة ا العلي القدير أن يرفع درجته في الدنيا والآخرة... وشكري يمتد لطفلي الغاليين عبدا وفرح فقد أخذت من وقتهما الكثير أسأل ا أن يمتعني بصلاحهم... وأشكر كل من أسدى لي معروفا وعلى رأسهم الأستاذ/ مساعد الشمراني والأخوات الغاليات سعادة الدكتورة/ شريفة الحازمي وسعادة الأستاذة/ شريفة الغامدي فبارك ا جهودهم وجزاهم عني خير الجزاء... والشكر موصول لجامعة الملك عبدالعزيز ممثلة في عمادة الدراسات العليا بالجامعة وأخص بالشكر سعادة الدكتور/ عدنان الحميدان وعميد كلية العلوم سعادة الأستاذ الدكتور/ عبدا بن يوسف عبيد ووكيلة كلية العلوم للبنات سعادة الأستاذة الدكتورة /ندى القرشي ووكيلة الدراسات العليا سعادة الدكتورة/ فائزة باوزير ورئيستي قسم الرياضيات سابقا سعادة الدكتورة/ فائزة البسام وسعادة الدكتورة/ نجاة مثنى ورئيس قسم الإحصاء سعادة الدكتور/ بندر الزهراني ومشرفة القسم سعادة الدكتورة/ هناء أبو زنادة... وأتوجه بخالص الشكر لجامعة أم القرى بمكة المكرمة ممثلة في عمادة الدراسات العليا وكلية العلوم التطبيقية للطالبات ممثلة في عميدتها سعادة الدكتورة/ هوازن مطاوع ووكيلة الكلية للدراسات العليا سعادة الدكتورة/ بسمة شافعي ورئيسة قسم الرياضيات سعادة الدكتورة/ نهى سيام وجميع منسوبات القسم...كما أتقدم بالشكرالجزيل لمدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية لدعمهم هذا البحث فجزاهم ا كل خير ونفع بهم الإسلام والمسلمين...ولا يفوتني في هذا المقام أن أشكر المحكمين الفاضلين اللذين تكرما بقبول تحكيم هذه الرسالة فزادني هذا القبول فخرا وشرفا سعادة الأستاذ الدكتور/ شوقي أحمد ابراهيم وسعادة الدكتور/ بخيت المطرفي ... أسأل ا أن يجزيهم خير الجزاء...وآخر دعوانا أن الحمد رب العالمين والصلاة والسلام على المبعوث رحمة للعالمين نبينا محمد وعلى آله أفضل الصلاة وأتم التسليم...

المستخلص

يعتبر نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة الذي قدمه Kamps(1995a) تعميماً يغطي العديد من أنواع العينات العشوائية التي تنتج من التجارب المختلفة والتي من ضمنها الإحصاءات المرتبة العادية والقيم المسجلة والإحصاءات المرتبة المتتالية وقيم بفيفر المسجلة بالإضافة إلى العينات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني.

كما يعتبر توزيع وايبل الأسي واحدا من أهم التوزيعات الإحصائية المعرفة حديثا في المجالين النظري والتطبيقي خصوصا في الدراسات الهندسية والكهربائية.

أما التقدير الإحصائي فيستخدم في الحصول على بعض التقديرات (بفترة أو بنقطة) لمعالم المجتمع المجهولة واعتمادا على بيانات معطاة من نفس المجتمع. ويعتبر التنبؤ الإحصائي من المواضيع ذات الصلة الوثيقة بالتقدير الإحصائي ويستخدم للتنبؤ بالقراءات المستقبلية (بفترة أو بنقطة) اعتمادا على بيانات معلومة مسبقا من نفس المجتمع.

إن الهدف الأساسي لهذه الرسالة هو الحصول على تقديرات وتنبؤات إحصائية لتوزيع وايبل الأسي اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة وباستخدام توزيعات قبلية معلمة وغير معلمة اعتمادا على دوال خسارة متماثلة وأخرى غير متماثلة وقد تم استخدام طرق سلسلة ماركوف لإنجاز بعض الحسابات المعقدة في النتائج التي تم التوصل إليها، وبناءا عليه فقد تم إيجاد تقديرات الإمكان الأكبر وتقديرات بييز لمعلمتي التوزيع ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل إضافة لنموذجي الإجهاد - القوة $S_1 = P(Y < X)$ ، $S_2 = P(X < Y < Z)$، كما تم حساب تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (بفترة أوبنقطة) باستخدام أسلوب العينة الواحدة وأسلوب العينتين اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة وتم استخدام دوال خسارة متماثلة وأخرى غير متماثلة وتوزيعات قبلية معلمة وغير معلمة لمعلمتي التوزيع، وتم تخصيص جميع النتائج التي تم الحصول عليها إلى العينات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني والقيم المسجلة الدنيا، وتم استخدام طرق سلسلة ماركوف في إنجاز بعض الحسابات العددية كما تمت مقارنة النتائج باستخدام محاكاة مونت كارلو، أيضا تم تطبيق النتائج على مجموعة من البيانات الحقيقية من واقع تجربة فعلية.

قائمة المحتويات

قائمة الأشكال

قائمة الجداول

قائمة الرموز والمصطلحات

$BSEL$	دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة.
$BLINEX$	دالة الخسارة الخطية الأسية.
$MCMC$	سلسلة ماركوف مونت كارلو.
$\hat{\Omega}_{ML}$	مقدرالإمكان الأكبرلـ Ω.
$\hat{\Omega}_{MLp}$	مقدر الإمكان الأكبر لـ Ω اعتمادا على العينات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني.
$\hat{\Omega}_{MLr}$	مقدر الإمكان الأكبر لـ Ω اعتمادا على القيم المسجلة الدنيا.
$\hat{\Omega}_{BS}$	مقدر بييز لـ Ω باستخدام دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة.
$\hat{\Omega}_{BSp}$	مقدر بييز لـ Ω باستخدام دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة اعتمادا على العينات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني.
$\hat{\Omega}_{BSr}$	مقدر بييز لـ Ω باستخدام دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة اعتمادا على القيم المسجلة الدنيا.
$\hat{\Omega}_{BL}$	مقدر بييز لـ Ω باستخدام دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة.
$\hat{\Omega}_{BLp}$	مقدر بييز لـ Ω باستخدام دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة اعتمادا على العينات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني.
$\hat{\Omega}_{BLr}$	مقدر بييز لـ Ω باستخدام دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة اعتمادا على القيم المسجلة الدنيا.
CS	نظام المراقبة.
AV	متوسط التقديرات.
ER	مخاطرة بييز المقدرة.
$E_{pd}(.\|\underline{x})$	القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الإحتمال التنبؤية لبييز.
$Inf.$	التوزيعات القبلية المعلمة.

الفصل الأول

مقدمة عامة

General Introduction

الحمد ﷲ رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين...

يلعب الاستدلال الإحصائي دورا هاما وأساسيا في العديد من الدراسات الميدانية والتطبيقات العملية حيث يعتبر واحدا من أكثر عناصر عملية اتخاذ القرار أهمية وحيوية. فعند تصميم تجارب اختبارات الحياة وتجارب اختبارات الصلاحية للمنتجات الصناعية بصفة عامة، فإن النتائج المسجلة من عينة الدراسة في مثل هذه التجارب تعتبر متغيرا عشوائيا يمكن توفيقه ليتبع في سلوكه أحد التوزيعات الإحصائية المعروفة والتي تعتمد على معالم parameters تختزن بداخلها كل خصائص التوزيع وبالتالي كل خصائص المجتمع تحت الدراسة، وعليه فإن الفرع الأساسي للاستدلال الإحصائي وهو التقدير الإحصائي statistical estimation خصص لتقدير هذه المعالم بطرق عديدة منها تقدير النقطة point estimation وتقدير الفترة interval estimation، وذلك باستخدام النهجين الكلاسيكي والبييزي classical and Bayesian approaches. ومن الطبيعي أنه إذا تم الحصول على تقديرات جيدة لمعالم هذا التوزيع فإن ذلك يمكننا من تحديد معظم خصائص المجتمع تحت الدراسة والذي يحكمه هذا التوزيع، حيث سنتمكن من إيجاد تقديرات لكل من دالة الصلاحية reliability function و دالة معدل التعطل hazard rate function وغيرهما من المقاييس الإحصائية الهامة لهذا التوزيع، وقد تم استخدام هذه الطرق في تقدير معالم الكثير من التوزيعات الإحصائية وذلك اعتمادا على أنواع مختلفة من العينات العشوائية مثل : العينات الكاملة complete samples، والعينات المراقبة censored samples بأنواعها، والقيم المسجلة العليا أو الدنيا upper or lower record values ، وغيرها من العينات التي تنتج من التجارب المختلفة. ويعتبر كتاب Johnson, Kotz and Balakrishnan (1994) أحد أهم المراجع التي

يمكن الاستعانة بها للوقوف على أغلب ما تم إنجازه من أعمال لمختلف التوزيعات الإحصائية الهامة في مجال التقديرات الإحصائية حتى تاريخ صدوره.

كما يعتبر التنبؤ الإحصائي statistical prediction من أهم الموضوعات ذات الصلة الوثيقة بالتقديرات الإحصائية والتي من خلال دراستها يمكن الإستفادة ممـا تحتويـه عينـة الدراسة من معلومات للتنبؤ بمعلومات تخص عينة مستقبلية من نفس مجتمع الدراسة. ففـي كثير من تجارب اختبارات الحياة أو تجارب اختبارات الصلاحية للمنتجات الصناعية يكـون من المهم دراسة كيفية الإستفادة من معلومات متوفرة عن منتج ما للتنبؤ بمعلومات مـستقبلية بغرض تحسين كفاءة هذا المنتج، وخاصة إذا أجريت التجربتان لدراسـة مجتمـع واحـد أو مجتمعين متشابهين، وهذا ما يسـمى بتنبؤ العينتين two-sample prediction .

أحد أهم الطرق التي تمكننا من ذلك هو محاولة تكوين فترة (بمستوى احتمالي معين) تحوي هذه النتائج المستقبلية وهي التي تسمى بفترات التنبؤ prediction interval، فترات التنبؤ هذه تأخذ أشكالا عديدة تتحدد تبعا لنوعية المعلومة المطلوب التنبؤ بها، فعلى سبيل المثال هناك :

- فترات التنبؤ بأحد المشاهدات من عينة مستقبلية (أقل مشاهدة أو أكبر مشاهدة مثلا).
- فترات التنبؤ بمتوسط أو وسيط أو مدى عينة مستقبلية.

وهناك أيضا تنبؤ العينة الواحدة one-sample prediction والذي فيه يكـون قـد تـم بالفعل تسجيل بعض القياسات لجزء من مفردات العينة تحت التجربة والمطلوب هو التنبؤ بما تبقى من قياسات نفس العينة.

التنبؤات الإحصائية بأشكالها المختلفة لها العديد من التطبيقات في الحياة العملية فعلى سبيل المثال: في المجال الطبي يمكن استخدام فكرة التنبؤ في التكهن بالسلوك الذي يسلكه مرض معين مستقبلا اعتمادا على معلومات سابقة عن طبيعة هذا المرض، وكذلك في تجارب المضادات الحيوية المستحدثة وفي المساعدة على التشخيص السليم قبيل إجراء العمليات الجراحية وما شابه ذلك، في المجالات الهندسية والتجارية تمكننا فترات التنبؤ من تحديد مدى الكفاءة المستقبلية للمنتجات وتحديد الزمن المناسب لشهادات الضمان وكذلك في إيجاد حل لكثير من مشاكل التحكم في جودة الإنتاج. وللمزيد عن تاريخ واستخدامات وأشكال التنبؤات الإحصائية يمكن الرجوع إلى:

Aitchison and Dunsmore (1975), Geisser (1993) and Retzer, Soofi and Soyer (2009).

على ضوء ما تقدم من عرض ملخص لأهمية الاستدلال الإحصائي (التقدير والتنبؤ الإحصائي)، فمن الأهمية بمكان توضيح ماهية الإحصاءات المرتبة المعممة التـي سـتعتمد عليها هذه الدراسة.

إن مفهوم الإحصاءات المرتبة المعممة generalized order statistics الـذي قدمـه العالم الألماني Kamps (1995a, 1995b) وجد اهتماما كبيرا في الفترة الأخيرة نظرا لكونـه تعميما يحتوي على العديد من أشكال العينات العشوائية المـستخدمة فـي انجـاز مختلـف الاستدلالات الإحصائية والتي من أشهرها وأكثرها استخداما الإحصاءات المرتبـة العاديـة ordinary order statistics، والقيم المسجلة record values بنوعيها العليا والـدنيا، والعينـات المراقبة censored samples بأنواعها، الإحصاءات المرتبـة التتابعيـة sequential order statistics وقيم بفيفر المسجلة Pfeifer records values وغيرها مـن العينـات العـشوائية. وعليه فإنه يمكننا القول بأن نتائج الدراسات المعتمدة على مثل هـذه الإحـصاءات المرتبـة المعممة تعتبر تعميما للعديد من النتائج السابقة والمعتمدة على نوعية معينـة مـن العينـات العشوائية السابق ذكرها.

المعالجات الإحصائية المعتمدة على الإحصاءات المرتبة المعممة تحتوي بالطبع على قدر كبير من التعقيد والصعوبة في العلاقات الرياضية الناتجة، ولكن التقـدم الحـالي فـي تكنولوجيا الحاسبات شجع الكثير من الباحثين على الخوض في هذا المجال بكل ثقة.

للمزيد عن الإحصاءات المرتبة المعممة يمكن الرجوع إلى:

Kamps (1995a, 1995b), Cramer (2003) and AL-Hussaini (2004).

وقد تناول الكثير من الباحثين موضوع الإحصاءات المرتبة المعممة في عدد من الدراسـات التي تتعلق بالاستدلال والتمييز والعلاقات التكرارية وغيرها.

حديثا (وفي العقدين الأخيرين) تم تعميم الكثير من التوزيعـات الإحـصائية الهامـة والشهيرة وذلك عن طريق إضافة معلمة جديدة للتوزيع لجعله أكثر مرونـة وأكثـر ثـراءا لنمذجة العديد من الظواهر الطبيعية. أحد أهم وابسط الطرق المستخدمة في ذلك هي رفع دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الأصلي لأس يعتبر معلمة جديدة، بمعنى لو افترضنا ان التوزيـع الأصلي له دالة التوزيع التراكمية $G(x)$ فإن التوزيع المعمم تكون له دالـة التوزيـع فـي الصورة $[G(x)]^{\alpha}$ حيث α هي المعلمة المستحدثة، والتوزيع المعمم الناتج في مثـل هـذه الحالات يكون مختلفا تماما عن التوزيع الأصلي في الكثير من خصائصه علاوة علـى أنـه يحوي التوزيع الأصلي بداخله كحالة خاصة، وعليه فإن التوزيعات المعممة الناتجة لا زالت

تحتاج إلى الكثير من الدراسة والفحص. وقد وجدنا من خلال المسح الشامل للدراسات السابقة في هذا المجال أن التوزيع الأسـي – أسـي او مـا يعـرف بـالتوزيع الأسـي المعمـم Exponentiated exponential distribution, or generalized exponential distribution نـال الكثير من الاهتمام حيث هناك العديد من الدراسات والاستدلالات الإحصائية المقرونة بهـذا التوزيع نذكر منها على سبيل المثال:

Alamm, Raqab and Madi (2007), Kundu and Gupta (2008), Raqab, Madi and Kundu (2008), Jaheen (2004)

وذلك لكون هذا التوزيع هو تعميم لأهم وأشهر توزيع إحصائي مـستخدم فـي دراسـات اختبارات الحياة ونظرية الصلاحية بصفة عامة، في المقابل وجدنا أن توزيع وايبـل الأسـي Exponentiated Weibull distribution وهو توزيع لا يقل أهمية عن التوزيع الأسي المعمم والذي قدمه حديثا Mudholkar and Srivastava (1993) لم ينل القدر الكافي مـن الاهتمـام والدراسة حتى الآن بما يتناسب مع أهميته، حيث أن توزيع وايبل أكثر عمومية لكونه تعميما للتوزيع الأسي وتوزيع رايلي، وقد تمت دراسة ومناقشة هذا التوزيع من قبل بعض الباحثين مثل:

Mudholkar and Kollia (1994), Mudholkar and Huston (1996), Nassar and Eissa (2003, 2004), Singh, Gupta and Upadhyay (2002, 2005a, 2005b) and Nadarajah and Kotz (2006).

تعتبر محدودية عدد الأبحاث التي تناولت توزيع وايبل الأسي على الرغم من أهميته التطبيقية من أهم أسباب اختيارنا لهذا التوزيع كنموذج لهذه الدراسة آملين أن تكـون نتـائج دراستنا هذه مساهمة - إلى حد ما - في الحصول على المزيد من النتائج الهامة والمفيـدة والمقرونة بهذا التوزيع، ومن الملاحظ أن كل الدراسات السابقة والخاصـة بتوزيـع وايبـل الأسي لم تتطرق لاستخدام مبدأ الإحصاءات المرتبة المعممة، وعليه سيتم في هـذا البحـث عمل العديد من الاستدلالات الإحصائية اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة من توزيع وايبل الأسي، والنتائج التي سيتم الحصول عليها تعتبر تعميما لكثير من النتائج السابقة لـنفس التوزيع.

ونظرا لأن الدراسة الحالية سوف تتناول عمل استدلالات إحصائية (تقدير وتنبؤ) من وجهتي النظر الكلاسيكية والبييزية، فمن المعلوم أن استدلالات بييز للمعـالم المختلفـة لأي نموذج من النماذج الإحصائية تعتمد أساسا على مدى ملاءمة اختيارنا للتوزيع القبلي المقترح

لهذه المعالم، وأيضا على دالة الخسارة المستخدمة، ومن خلال الدراسات السابقة في مجـال التقديرات الإحصائية باستخدام طرق بييز لاحظنا أن الكثير من الباحثين يستخدم دالة مربـع الخطأ squared error function كدالة خسارة نظرا لسهولة الحصول على المقدرات المعتمدة عليها (حيث أن مقدر بييز للمعلمة في هذه الحالة هو متوسط التوزيع البعدي لهذه المعلمـة)، ولكن هذا الاتجاه عارضه عدد من الباحثين نظرا لأن دالة مربع الخطأ دالة تربيعية متماثلـة تعطي أهمية متساوية لحالتي التقدير الأعلى والأدنى، وهذا يتعارض مع ما هو معلوم (علـى سبيل المثال) من أن التقدير الأعلى overestimation مثلا في حالة دالة الصلاحية عادة مـا يكون ذو خطورة أكبر عنه في حالة التقدير الأدنى underestimation، هذا ما أكده الباحثون في:

Basu and Ebrahimi (1991), Akdeniz and Namba (2003) and Soliman (2005).

ويتم التغلب على هذه المشكلة عادة باستخدام دوال خسارة غير متماثلة مثل دالة الخسـارة الخطية الأسية linear-exponential loss function وتكتب باختصار LINEX. وفـي هـذه الدراسة سيتم استخدام دالة الخسارة المتوازنة balanced loss function التي قدمها Zellner (1994) والتي تعتبر تعميما يشمل دالة خسارة مربع الخطأ ودالة الخسارة الخطيـة الأسـية كحالات خاصة.

أما ما يخص التوزيعات القبلية prior distributions المفترضة فسيتم الاستعانة بالعديد من أشكال التوزيعات القبليـة المعلمـة informative prior distributions وغيـر المعلمـة non informative prior distributions .

تعتبـر مـسالة دالـة الـصلاحية (أو الموثوقيـة) نمـوذج الإجهـاد - القـوة stress - strength model من المسائل الهامة ذات التطبيقات العديدة في دراسـات الـصلاحية ومقارنة الظواهر الطبيعية، فإذا اعتبرنا أن النظام تحت الدراسة له قـوة تحمـل X وأثنـاء تشغيل هذا النظام كان الإجهاد المؤثر عليه ممثل بالمتغير العشوائي المستقل Y فإن هذا النظام سيعمل بنجاح إذا كانت قوة تحمله أكبر مما يقع عليه من إجهاد وهذا ما يعبـر عنـه بدالـة الصلاحية في الصورة $S = P(Y < X)$، و استخدم كثير من الباحثين هذه الصيغة للتعبير عن قياس الاختلاف بين ظاهرتين، بمعنى لو افترضنا أن X تمثل زمن الشفاء لمجموعـة مـن المرضى الخاضعين للعلاج A وكانت Y تمثل زمن الـشفاء لمجموعـة مـن المرضـى الخاضعين للعلاج B فإن طريقة العلاج B ستكون مفضلة علـى الطريقـة A إذا كانـت $S = P(Y < X) > 1/2$. لمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع لكتاب : Kotz, Lumelskii and

Pensky (2003) حيث يعتبر من أفضل وأحدث المراجع التي تناولت موضوع دالة الصلاحية (نموذج الإجهاد – القوة) وتطبيقاته المختلفة.

نظرا لحداثة توزيع وايبل الأسي فإن مسألة دراسة تقدير دالـة الـصلاحية نمـوذج الإجهاد - القوة لهذا التوزيع لم يتم تناولها بالدراسة حتى الآن، لذا سيتم تخصيص جزء من هذه الدراسة لتقدير دالة الصلاحية لنموذج الإجهاد - القوة، ومن الملاحظ أن هذا الموضـوع تم تناوله من قبل الكثير من الباحثين للعديد من التوزيعات الإحصائية (ليس من بينها توزيـع وايبل الأسي) عندما تكون كل من القوة والإجهاد إحصاءات مرتبة عادية ولا نجد - على حد علمنا - سوى الأبحاث: Wong and Wu (2009) and Baklizi (2008a, 2008b) والتي تـم فيها مناقشة تقدير دالة الصلاحية باعتبار كل من القوة والإجهـاد مجمـوعتين مـن القـيم المسجلة، لذلك حرصنا على تقدير دالة الصلاحية لنموذج الإجهاد - القوة عندما يكون كل من القوة والإجهاد ممثلة بمجموعتين من الإحصاءات المرتبة المعممة والتي تتبع توزيـع وايبـل الأسي، ومنها سيتم استنباط بعض الحالات الخاصة.

تتكون هذه الرسالة من ستة فصول إضافة إلى فصل المقدمة بيانها كالآتي:

<u>الفصل الثاني:</u>

المفاهيم الأساسية والدراسات السابقة

Basic Concepts and Previous Studies

يتكون هذا الفصل من ثلاثة أجزاء أساسية:

- <u>الجزء الأول:</u> تم تخصيصه لعرض بعض التعاريف والمفـاهيم الأساسـية والنتـائج السابقة التي تعتمد عليها هذه الدراسة.
- <u>الجزء الثاني:</u> ويتضمن عرضا لتوزيع وايبل الأسي مع توضيح أهميتـه التطبيقيـة وذكر بعض خصائصه.
- <u>الجزء الثالث:</u> وفيه تم عرض أحدث الدراسات السابقة ذات الصلة الوثيقـة بنقطـة الدراسة.

<u>الفصل الثالث:</u>

تقدير بييز لتوزيع وايبل الأسي اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة

Bayes Estimation for the Exponentiated Weibull Distribution based on Generalized Order Statistics

في هذا الفصل تم إيجاد مقدرات الإمكان الأكبر ومقدرات بييز لمعلمتي التوزيع إضافة إلى دالتي الصلاحية و معدل التعطل باستخدام الإحصاءات المرتبة المعممة اعتمادا على دوال خسارة متماثلة مثل دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة balanced squared error loss function (BSEL) وأخرى غير متماثلة مثل دالة الخسـ ـ ـ ـارة الخطية الأسية المتوازنة balanced linex loss function (BLINEX) وذلك باعتبار الحالات الآتية للتوزيعات القبلية:

- توزيعات قبلية معلمة.
- توزيعات قبلية غير معلمة.

أيضا تم في هذا الفصل حساب مصفوفة معلومات فشر التقريبية والتي تم استخدامها في الحصول على التباينات والتغايرات التقريبية لمقدرات الإمكان الأكبر والحـصول علـى تقديرات الفترة لمعلمتي التوزيع، كما تم استخدام أحد العينات الحقيقية (من واقع تجربة فعلية) كمثال تطبيقي لتوضيح الأهمية والكيفية التطبيقية للنتائج التي تم التوصل إليها، وأخيـرا تـم عمل مقارنـات عـددية لمخـتلف التـقديرات الناتـجة باسـتخدام دراسـ ـ ـ ـة المحاكاة simulation study.

<u>الفصل الرابع:</u>

تقدير بعض نماذج الإجهاد – القوة لتوزيع وايبل الأسي

Estimation for Some Stress – Strength Models for the Exponentiated Weibull distribution

تم في هذا الفصل استخدام نموذجين من نماذج الإجهاد – القوة وهما:

النموذج $S_1 = P(Y < X)$ و النموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$ وتم تقديرهما اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة بطريقة الإمكان الأكبر وطرق بييز المختلفة باستخدام دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة BSEL ودالة الخسـ ـ ـ ـارة الخطية الأسية المتوازنة BLINEX وذلك باعتبار الحالات الآتية:

- توزيعات قبلية معلمة.

- توزيعات قبلية غير معلمة.

وتم تخصيص النتائج للعينات المراقبة تتابعيا وللقيم المسجلة الدنيا.

أيضا تم عمل مقارنات عـددية لمخـتلف التـقديرات الناتـجة باستخدام دراســة المحاكاة.

الفصل الخامس:

تنبؤ العينة الواحدة لإحصاءات مرتبة معممة من توزيع وايبل الأسي

One-Sample Prediction for Generalized Order Statistics from the Exponentiated Weibull Distribution

في هذا الفصل تم الاعتماد على جزء من عينة من الإحصاءات المرتبة المعممة من توزيع وايبل الأسي وذلك للحصول على تنبؤات بييز للقيم المستقبلية من نفس العينة .

تم حساب تنبؤات الإمكان الأكبر، وتنبؤات بييز باستخدام:

- توزيعات قبلية معلمة.

- توزيعات قبلية غير معلمة.

تنبؤات النقطة تم حسابها اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطـأ المتوازنـة BSEL ودالـة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة BLINEX.

أيضا تم استخدام أحد العينات الحقيقية كمثال تطبيقي لتوضيح الكيفية التطبيقية للنتائج التي تم التوصل إليها، وأخيرا تم استخدام دراسة المحاكاة للتأكد من دقة النتائج مع إجـراء بعـض المقارنات العددية.

الفصل السادس:

تنبؤ العينتين لإحصاءات مرتبة معممة من توزيع وايبل الأسي

Two-Sample Prediction for Generalized Order Statistics from the Exponentiated Weibull Distribution

في هذا الفصل تم الاعتماد على عينة سابقة من الإحصاءات المرتبة المعممة من توزيع وايبل الأسي وذلك للحصول على تنبؤات بييز لقيم عينة مستقبلية من نفس التوزيع.

تم حساب تنبؤات الإمكان الأكبر، وتنبؤات بييز باستخدام:

- توزيعات قبلية معلمة.
- توزيعات قبلية غير معلمة.

تنبؤات النقطة تم حسابها اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطـأ المتوازنـة BSEL ودالـة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة BLINEX.

أيضا تم استخدام أحد العينات الحقيقية كمثال تطبيقي لتوضيح الكيفية التطبيقية للنتائج التـي تم التوصل إليها، وأخيرا تم استخدام دراسة المحاكاة للتأكد من دقة النتائج مع إجراء بعـض المقارنات العددية.

<u>الفصل السابع:</u>

بعض الاقتراحات لدراسات مستقبلية

Some Suggestions for Future Studies

وقد احتوى هذا الفصل بعض الاقتراحات التى يمكن دراستها مستقبلا بإذن ا .

الفصل الثاني

المفاهيم الأساسية والدراسات السابقة

Basic Concepts and Previous Studies

(٢-١) مقدمـة Introduction

يتكون هذا الفصل من ثلاثة أجزاء أساسية:

- الجزء الأول (٢-٢) ويتضمن عرضا لبعض التعاريف والمفاهيم الأساسية والنتـائج السابقة التي تعتمد عليها هذه الدراسة.
- الجزء الثاني (٢-٣) وفيه تم عرض لتوزيع وايبل الأسـي مـع توضـيح أهميتـه التطبيقية وذكر بعض خصائصه.
- الجزء الثالث (٢-٤) وفيه تم عرض أهم وأحدث الدراسـات الـسابقة ذات الـصلة الوثيقة بموضوع الدراسة.

(٢-٢) مفاهيم أساسية Basic Concepts

(٢-٢-١) الإحصاءات المرتبة العادية Ordinary order statistics

بفـرض أن $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيـرات عـشوائية مـستقلة ومتطابقـة التوزيـع independent identically distributed ولهـا دالـة كثافـة الاحتمـال probability density function $f(x)$ ودالة التوزيع التراكميـة cumulative distribution function $F(x)$ فـإن مجموعة الإحصاءات المرتبة العادية الناتجة من هـذه المتغيـرات تكـون علـى الـصورة $X_{1:n} \le X_{2:n} \le ... \le X_{n:n}$ حيث $X_{i:n}$ ترمز للإحصاء المرتب ذي الترتيب $i, i = 1, ..., n$ من عينة الإحصاءات المرتبة ذات الحجم n، وتكون دالة كثافة الاحتمال الهامـشية للإحـصاء المرتب ذي الترتيب r، $X_{r:n} \equiv X$ على الصورة:

$$g(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} F(x)^{r-1} (1 - F(x))^{n-r} f(x), \ -\infty < x < \infty. \quad (2.1)$$

أما دالة كثافة الاحتمال المشتركة لجميع الإحصاءات المرتبة $X_1, X_2, ..., X_n$ فتعطى بالعلاقة التالية:

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \quad , \ 0 \le x_1 \le x_2 \le ... \le x_n . \qquad (2.2)$$

ولمزيد من الإطلاع على الإحصاءات المرتبة العادية يمكن الرجوع إلى:

David (1981), Balakrishnan and Rao (1998) and David and Nagaraja (2003).

(٢-٢-٢) العينات المراقبة Censored sample

العينات المراقبة ذات أهمية كبيرة في تجارب اختبارات الحياة واختبارات الصلاحية، وأهمية مثل هذه العينات تكمن في أنها هي الأنسب من الناحية العملية لما توفره من وقت وتكاليف، خاصة إذا كانت الوحدات المستخدمة في التجربة تحت الاختبار غالية الثمن، ويقال ببساطة أن العينة مراقبة إذا تم وضع n من الوحدات (مثلا) تحت الاختبار في أحد تجارب اختبارات الحياة، وتم تسجيل أزمان الفشل لجزء من وحدات العينة وليس كل الوحدات.

من المعروف أنه في التطبيقات الفعلية يصعب بصفة عامة الحصول على كل المعلومات الخاصة بكل وحدات التجربة تحت الاختبار لأسباب عديدة، لذا يكون من المهم جدا محاولة الحصول على الاستدلالات الإحصائية الخاصة بظاهرة ما اعتمادا على عينات غير كاملة من مشاهدات هذه الظاهرة. هناك العديد من أنواع العينات المراقبة التي تعالج حالات كثيرة تحدث في الحياة العملية ومن ثم يتم تناولها بالدراسة في تجارب اختبارات الحياة الفعلية، فهناك مصمم للتجربة يهمه إنجازها في أقصر وقت ممكن (أي أن عامل الوقت مهم جدا في هذه التجربة)، لذا يلجأ لإنهاء التجربة بعد وقت محدد وعينة المشاهدات التي حصل عليها في هذه الحالة عينة غير كاملة (مراقبة)، وهناك مصمم آخر يتعامل مع وحدات غالية الثمن ويرغب في خفض التكاليف لذا يلجأ إلى إنهاء التجربة بعد تسجيل أزمان الفشل لعدد معين من وحدات التجربة وليس كل الوحدات، وعليه فإن عينة المشاهدات التي حصل عليها في هذه الحالة هي أيضا عينة غير كاملة، وهناك الكثير من الحالات في الواقع العملي والتي تحتم علينا التعامل مع عينات مراقبة. وهنا سنذكر بعضا من أنواع العينات المراقبة المهمة:

- **العينة المراقبة من النوع الأول**

Type-I censored sample

بفرض عينة عشوائية حجمها n من الوحدات وضعت تحت الاختبار آنيا وتم إنهاء التجربة بعد زمن محدد وليكن t_0، في هذه الحالة يكون عدد المشاهدات التي تم تسجيلها حتى الزمن t_0 متغيرا عشوائيا، وتمثل مجموعة المشاهدات المسجلة العينة المراقبة من النوع الأول. لمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع إلى Cohen (1991) .

- **العينة المراقبة من النوع الثاني**

Type-II censored sample

بفرض عينة عشوائية حجمها n من الوحدات وضعت تحت الاختبار آنيا وتم إنهاء التجربة بعد تسجيل المشاهدات الأولى ذات العدد r حيث $(r < n)$ ولا زالت باقي الوحدات ذات الحجم $(n - r)$ تعمل، في هذه الحالة عينة المشاهدات التي تم تسجيلها ذات الحجم الثابت r تعرف بالعينة المراقبة من النوع الثاني (مع ملاحظة أن زمن إنهاء التجربة في هذه الحالة يعتبر متغيرا عشوائيا).

- **العينة ذات المراقبة المزدوجة من النوع الثاني**

Doubly type-II censored sample

وفي العينة السابقة (العينة المراقبة من النوع الثاني)، إذا افترضنا عدم إمكانية تسجيل أزمان الفشل للوحدات الأولى ذات العدد m حيث $(m < r)$ فإن العينة الناتجة ذات الحجم $(r - m)$ تسمى عينة ذات مراقبة مزدوجة (ثنائية) من النوع الثاني.

هناك العديد من الأبحاث والمراجع التي تناولت مختلف أنواع العينات المراقبة للحصول على استدلالات إحصائية للعديد من التوزيعات الإحصائية، لتوضيح أكثر ومراجع أوفر عن طبيعة وتطبيقات مختلف أنواع العينات المراقبة يمكن الرجوع إلى:

Balakrishnan and Cohen (1991), Cohen (1991) and Cohen and Whitten (1988).

- **العينة المراقبة تتابعيا من النوع الثاني**

Progressive type-II censored sample

من الواضح ومن تعريف أنواع العينات المراقبة السالف ذكرها أنه لا يمكن سحب أي من وحدات التجربة تحت الاختبار بشكل عشوائي لاستخدامها مثلا في تجربة أخرى تخفيضا للتكاليف، أوسحبها بسبب حدوث حادث مفاجئ يستدعي استبعاد هذه الوحدة... الخ، لذلك نشأت الحاجة إلى تعريف نوع أعم من أنواع العينات المراقبة وهو ما يسمى بالعينات

المراقبة تتابعيا، فكرة العينات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني يمكن عرضها باختصار كالآتي:

بفرض أنه في أحد تجارب اختبارات الحياة تم وضع n من الوحدات المستقلة والمتطابقة التوزيع تحت الاختبار آنيا.

- عند تسجيل زمن الفشل الأول X_1 فإنه يتم سحب R_1 بطريقة عشوائية من الوحدات المتبقية ذات الحجم $(n-1)$.

- عند تسجيل زمن الفشل الثاني X_2 فإنه يتم سحب R_2 بطريقة عشوائية من الوحدات المتبقية ذات الحجم $(n-2-R_1)$.

- تستمر التجربة على هذا المنوال حتى يتم تسجيل زمن الفشل رقم r وليكن X_r وعندها يتم سحب الوحدات المتبقية في التجربة والتي عددها $(R_r = n-r-R_1-R_2-...-R_{r-1})$.

- العينة الناتجة سوف نرمز لمفرداتها بالرمز $(X_{i:r:n}^{(R_1,R_2,...,R_r)},\ i=1,2,...,r)$ وهي العينة المراقبة تتابعيا من النوع الثاني ذات الحجم r والمرتبطة بنظام المراقبة $(R_1,R_2,...,R_r)$ والمختارة من عينة المشاهدات ذات الحجم n.

إذا افترضنا أن أزمان الفشل للوحدات تحت التجربة $(X_{i:r:n}^{(R_1,R_2,...,R_r)} = X_i\ ,\ i=1,2,...,r)$ تتبع توزيعا احتماليا متصلا له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ودالة التوزيع التراكمية $F(x)$ فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لها تكون على الصورة:

$$f_{X_1,X_2,...,X_r}(x_1,x_2,...,x_r) = A\prod_{i=1}^{r} f(x_i)[1-F(x_i)]^{R_i}\ , \qquad (2.3)$$

حيث

$$A = n(n-1-R_1)(n-2-R_1-R_2)...(n-\sum_{i=1}^{r-1}(R_i+1)). \qquad (2.4)$$

ملحوظة: من الواضح أن نظام المراقبة التتابعية من النوع الثاني السابق وصفه يمكن أن يؤول إلى الحالات الخاصة التالية:

١- نظام المراقبة من النوع الثاني وذلك عندما تكون

$$R_1 = R_2 = ... = R_{r-1} = 0,\ \ R_r = n-r.$$

٢- النظام الخالي من المراقبة (العينة الكاملة) complete sample عندما

$$n = r,\ R_1 = R_2 = ... = R_r = 0.$$

من أهم الكتب التي تناولت هذا النوع من أنواع العينـات المراقبـة وتطبيقاتهـا

Balakrishnan and Aggarwala (2000) and Kamps and Cramer (2001).

وحديثا تم استخدام هذا النوع من العينات المراقبة من قبل العديد من الباحثين في الحـصول على استدلالات إحصائية لكثير من التوزيعات نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر:

Ali Mousa and Jaheen (2002), Bordes (2003), Balakrishnan et al. (2004), Fernandez (2004), Ali Mousa and AL-Sagheer (2005), Singh, Gupta and Upadhyay (2005a, 2005b), Soliman (2005), Basak, Basak and Balakrishnan (2006), Abdel-Hamid (2009), Kim and Han (2009) and Madi and Raqab (2009).

(٢-٢-٣) القيم المسجلة Record values

تظهر القيم المسجلة (القياسية) في كثير من التجارب في الحياة العملية، فنسمع أحيانا أنه تم التوصل إلى صناعة قطار سرعته تصل إلى ٣٠٠ كلم / ساعة أو أن عدد المعتمـرين ٥ مليون مسلم خلال شهر رمضان الماضي، وقد نسمع أن لاعبا قد سجل رقما قياسـيا فـي سباق ٥ كلم عدوا أو أن لاعبا قد سجل رقما قياسيا في رفع الأثقال وهكذا... وتستخدم هـذه القيم المسجلة على أنها العينة المتاحة من التجربة الإحصائية، وتكون أكثـر اسـتخداما فـي نظرية التقدير estimation theory ونظرية الصلاحية reliability theory ، وأيضا في التنبـؤ الإحصائي فعلى سبيل المثال: في محطات الأرصاد الجوية يكون من المهم التنبؤ بـالتغيرات المناخية المفاجئة وغير المتوقعة، أو التنبؤ بأعلى منسوب للمياه في نهر ما، أو التنبؤ بـأعلى (أو أدنى) درجة حرارة في الفترة القادمة، مثل هذه التنبؤات تستلزم في قياساتها عينة مـن القيم المسجلة السابقة عن هذه الظاهرة. و تكون القيم المسجلة إما قيم مسجلة عليـا أو قـيم مسجلة دنيا، وتعرف **القيم المسجلة** كما يلي:

إذا كانت $X_1, X_2, ...$ سلسلة لا نهائية من متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع وكانت $f(x)$ و $F(x)$ هما دالة كثافـة الاحتمـال و دالـة التوزيـع التراكميـة للمتغيـر العـشوائي X علـى التـوالي، فإنـه يقـال أن X_j قيمـة مـسجلة عليـا (دنيـا) upper (lower) record value إذا كان $X_j > (<) X_{j-1}$ حيث $j > 1$.

وتعرف سلسلة الأزمنة المسجلة $T_n, n \geq 0$ كما يلي:

عنـدما $n = 0$ فـإن $T_0 = 1$ باحتمـال يـساوي الواحـد وعنـدما تكـون $n \geq 1$ فـإن $T_n = \min\{j : X_j > (<) X_{T_{n-1}}\}$ ، عندئذ تعرف سلـسلة القـيم المـسجلة العليـا $\{X_{U_{(n)}}\}$ بالصورة:

$$X_{U_{(n)}} = X_{T_n}, \quad n = 0,1,2,...$$

بفرض أن $X_{U_{(1)}}, X_{U_{(2)}} ..., X_{U_{(r)}}$ هي أول r قيمة مسجلة عليا مـن مجتمـع دالـة كثافته الاحتمالية هي $f(x)$ ودالة توزيعه التراكمية $F(x)$ فإن دالة كثافة الاحتمـال للقيمـة المسجلة العليا $X_{U_{(i)}} \equiv X$ حيث $i \geq 1$ تعطى بالعلاقة:

$$f_{U_{(i)}}(x) = \frac{H^{i-1}(x) f(x)}{(i-1)!}, \tag{2.5}$$

أما دالة كثافة الاحتمال المشتركة لجميع القيم $X_{U_{(1)}}, X_{U_{(2)}} ..., X_{U_{(r)}}$ فتعطى بالعلاقة:

$$f(x_1, x_2, ..., x_r) = \prod_{i=1}^{r-1} h(x_i) f(x_r), \quad -\infty < x_1 < ... < x_r < \infty, \tag{2.6}$$

حيث

$$H(.) = -\ln[1 - F(.)], \quad h(.) = f(.)/(1 - F(.)). \tag{2.7}$$

وتعرف سلسلة القيم المسجلة الدنيا $\{X_{L_{(n)}}\}$ بالشكل التالي:

$$X_{L_{(n)}} = X_{T_n}, \quad n = 0,1,2,...$$

وبفرض أن $X_{L_{(1)}}, X_{L_{(2)}} ..., X_{L_{(r)}}$ هي أول r قيمة مسجلة دنيا من مجتمـع دالـة كثافتـه الاحتمالية هي $f(x)$ ودالة توزيعه التراكمية $F(x)$ فإن دالة كثافة الاحتمال للقيمة المـسجلة الدنيا $X_{L_{(i)}} \equiv X$ حيث $i \geq 1$ تعطى بالعلاقة:

$$f_{L_{(i)}}(x) = \frac{G^{i-1}(x) f(x)}{(i-1)!}, \tag{2.8}$$

وتعطى دالة كثافة الاحتمال المشتركة لجميع القيم $X_{L_{(1)}}, X_{L_{(2)}} ..., X_{L_{(r)}}$ بالعلاقة:

$$f(x_1, x_2, ..., x_r) = \prod_{i=1}^{r-1} g(x_i) f(x_r), \quad -\infty < x_r < ... < x_1 < \infty, \tag{2.9}$$

حيث

$$G(.) = \ln\left[F(.)\right], \ g(.) = f(.)/F(.). \tag{2.10}$$

<u>ملاحظات:</u>

١- يتضح من التعريف أن أول قيمة مسجلة عليا هي نفسها أول قيمة مسجلة دنيا وبالتـالي سيكون لهما نفس الدالة الاحتمالية.

٢- يمكن تحويل القيم المسجلة العليا إلى قيم مسجلة دنيا والعكس باستخدام تحويلات بسيطة كما يلي:

- الطريقة الأولى: باستبدال قيم سلسلة المتغيرات العشوائية الأصلية بالقيم $(-X_j)$ حيث $j \geq 1$.
- الطريقة الثانية: باستبدال قيم سلسلة المتغيرات العشوائية الأصلية بالقيم $(1/X_j)$ حيث $j \geq 1$ إذا كان $P(X_j > 0) = 1$ لكل j.

٣- يمكن الحصول على العلاقات الخاصة بالقيم المسجلة الدنيا من العلاقات الخاصة بالقيم المسجلة العليا باستبدال الدالة $(1-F(x))$ بالدالة $F(x)$.

(٢-٢-٤) القيم المسجلة من الرتبة k   k-Record values

إذا كانت $X_1, X_2, ...$ سلسلة من متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع لها دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ودالة التوزيع التراكمية $F(x)$ فإن القيم المسجلة العليا (الدنيا) من الرتبة الأولى $(k=1)$ تحدد بتسجيل المشاهدة الأولى x_1 كأول قيمة مسجلة عليا (دنيا) ثم تتم ملاحظة المشاهدة التالية لها x_2 فإذا كانت أكبر (أصغر) من x_1 فتسجل على أنها القيمة المسجلة العليا (الدنيا) الثانية وإلا فتترك وبالمثل تتم ملاحظة المشاهدة الثالثة x_3 فإما أن تسجل إذا كانت أكبر(أصغر) من المشاهدتين السابقتين أو تترك وهكذا... وهذه هي القيم المسجلة التي سبق شرحها في الفقرة السابقة ولكن في كثير من التطبيقات العملية يكون الإهتمام منصبا على ثاني أكبر(أصغر) قيمة فنكون بصدد القيم المسجلة العليا (الدنيا) من الرتبة الثانية والتي نحصل عليها كما يلي:

- يتم تحديد أكبر(أصغر) قيمة من بين أول مشاهدتين وتسجل على أنها القيمة المسجلة الأولى.
- يتم التركيز على الثلاث مشاهدات الأولى وترتب تنازليا في حالة القيم المسجلة العليا (ترتب تصاعديا في حالة القيم المسجلة الدنيا) ويتم اختيار القيمة الثانية وتسجل على أنها القيمة المسجلة الثانية إذا كانت مختلفة عن القيمة المسجلة الأولى التي سبق تسجيلها وإلا فتترك.
- يتم التركيز على الأربع مشاهدات الأولى وترتب تنازليا في حالة القيم المسجلة العليا (ترتب تصاعديا في حالة القيم المسجلة الدنيا) ويتم اختيار القيمة الثانية وتسجل على أنها

القيمة المسجلة الثالثة إذا كانت مختلفة عن القيمتين المسجلتين الأولى والثانية (إن وجدت) اللتين سبق تسجيلهما وإلا فتترك.

- تكرر هذه العملية عدة مرات للحصول على عينة القيم المسجلة من الرتبة الثانية.

وبنفس الأسلوب يمكن تكوين عينة القيم المسجلة من الرتبة k.

وتعرف القيم المسجلة من الرتبة k رياضيا كما يلي:

بفرض أن $T_{1(k)} = k$ باحتمال يساوي الواحد ، ولقيم $n \geq 2$ يكون:

$$T_{n(k)} = \min\left\{ j : j > T_{n-1(k)}, X_j > (<) X_{T_{n-1(k)}-k+1:T_{n-1(k)}} \right\}, \; n \geq 2.$$

حيث $X_{i:m}$ ترمز للإحصاء المرتب ذي الترتيب i في العينة ذات الحجم m بالتالي فإن القيم المسجلة العليا (الدنيا) من الرتبة k تعرف كما يلي:

$$R_{n(k)} = X_{T_n(k)-k+1:T_{n(k)}}, \; n = 1,2,3...$$

وباختيار $k = 1$ نحصل على القيم المسجلة العادية.

وتكون دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ r من القيم المسجلة العليا من الرتبة k على الصورة:

$$f(x_1,...,x_r) = k^r \prod_{i=1}^{r} \frac{f(x_i)}{1-F(x_i)} (1-F(x_r))^k, \qquad (2.11)$$
$$-\infty < x_1 < ... < x_r < \infty.$$

أما دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ r من القيم المسجلة الدنيا من الرتبة k فهي على الصورة :

$$f(x_1,...,x_r) = k^r \prod_{i=1}^{r} \frac{f(x_i)}{F(x_i)} (F(x_r))^k, \qquad (2.12)$$
$$-\infty < x_1 < ... < x_r < \infty.$$

وللمزيد عن القيم المسجلة يمكن الرجوع إلى:

Ahsanullah (1995) and Arnold, Balakrishnan and Nagaraja (1998)

وهناك العديد من الأبحاث والدراسات التي تناولت موضوع القيم المسجلة واستخداماتها وتطبيقاتها نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر:

Jaheen (2004,2005), Soliman, Abd – Ellah and Sultan (2006), Soliman and AL-Aboud (2008), Sultan, AL-Dayian and Mohammad (2008), Ahmadi and MirMostafaee (2009) and Ahmadi et al. (2009a,b).

(٢-٢-٥) قيم بفيفر المسجلة Pfeifer records

إذا كانت $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ أعدادا حقيقية موجبة معطاة فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لقيم بفيفر المسجلة من المتغيرات العشوائية غير المستقلة والتي لها توزيعات مختلفة ومعتمدة على $F(t)=1-(1-F(t))^{\beta_r}$ تكون على الصورة:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{j=1}^{n}\beta_j[\prod_{i=1}^{n-1}(1-F(x_i))^{\beta_i-\beta_{i+1}-1}f(x_i)] \\ (1-F(x_n))^{\beta_n-1}f(x_n). \tag{2.13}$$

وتكون دالة كثافة الاحتمال المشتركة لأول r من قيم بفيفر المسجلة على الصورة:

$$f(x_1,x_2,...,x_r)=\prod_{j=1}^{r}\beta_j[\prod_{i=1}^{r-1}(1-F(x_i))^{\beta_i-\beta_{i+1}-1}f(x_i)] \\ (1-F(x_r))^{\beta_r-1}f(x_r). \tag{2.14}$$

ويعتمد نموذج بفيفر المسجل على متتاليتين من المتغيرات العشوائية التي ليس لها نفس التوزيع non-identical ويحتوي هذا النموذج على الكثير من خصائص القيم المسجلة العادية. لمعرفة المزيد عن نموذج بفيفر المسجل يمكن الرجوع إلى:

Pfeifer(1982a,b), Navzorov (1987).

(٢-٢-٦) الإحصاءات المرتبة المتتالية Sequential order statistics

يعتبر نموذج الإحصاءات المرتبة المتتالية امتدادا للإحصاءات المرتبة العادية، ويكثر استخدامها في كثير من التطبيقات الإحصائية، وتكون دالة كثافة الاحتمال المشتركة لمتتالية الإحصاءات المرتبة على الصورة:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=n!\prod_{j=1}^{n}\alpha_j[\prod_{i=1}^{n-1}(1-F(x_i))^{(n-i+1)\alpha_i-(n-i)\alpha_{i+1}-1}f(x_i)] \\ (1-F(x_n))^{\alpha_n-1}f(x_n), \tag{2.15}$$

حيث F هي دالة توزيع تراكمية اختيارية.

وتكون دالة كثافة الاحتمال المشتركة لأول r من الإحصاءات المرتبة المتتالية على الصورة:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{n!}{(n-r)!}\prod_{j=1}^{r}\alpha_j[\prod_{i=1}^{r-1}(1-F(x_i))^{(n-i+1)\alpha_i-(n-i)\alpha_{i+1}-1}f(x_i)] \\ (1-F(x_r))^{\alpha_r(n-r+1)-1}f(x_r). \tag{2.16}$$

(٢-٢-٧) الإحصاءات المرتبة المعممة Generalized order statistics

يعتبر نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة generalized order statistics الذي قدمـه Kamps (1995a,b) نموذجا نظريا يغطي العديد من أنواع العينات العشوائية التي تنتج مـن التجارب العملية المختلفة والتي من ضمنها الإحصاءات المرتبة العادية والعينـات المراقبـة بأنواعها والقيم المسجلة العليا أو الدنيا من رتب مختلفة والتي سبق شـرحها فـي الفقـرات السابقة، وقد وجد هذا النموذج اهتماما كبيرا من قبل الباحثين في مجال الإحصاء لكونه يوفر الكثير من الوقت والجهد المبذولين في إجراء العمليات الحسابية لكل نوع من أنواع العينـات التي يحويها هذا النموذج على حده.

وقد قام Kamps (1995a) بتعريف هذا النموذج كما يلي:

بـدأ بتعريـف الدالـة الاحتماليـة المـشتركة لعـدد n مـن المتغيـرات العـشوائية $U(j,n,\tilde{m},k),\ j=1,2,...,n$ التي تتبع التوزيع المنتظم المتصل في الفترة $(0,1)$ على النحو الآتي:

تسمى المتغيرات العشوائية $U(j,n,\tilde{m},k)$ حيـث $j=1,2,...,n$ بالإحـصاءات المرتبـة المعممة المنتظمة uniform generalized order statistics إذا كانت دالـة كثافـة الاحتمـال المشتركة لها على الصورة:

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),...,U(n,n,\tilde{m},k)}(u_1,...,u_n)=C_{n-1}\left[\prod_{i=1}^{n-1}(1-u_i)^{m_i}\right](1-u_n)^{k-1}, \qquad (2.17)$$

حيث

$$n\in N,\ n\geq 2,\ k\geq 1,\ \tilde{m}=(m_1,...,m_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1},\ 0\leq u_1\leq ...\leq u_n\leq 1,$$

و

$$C_{n-1}=\prod_{i=1}^{n}\gamma_i=k\prod_{i=1}^{n-1}\gamma_i, \qquad (2.18)$$

و

$$\gamma_j=k+n-j+\sum_{i=j}^{n-1}m_i>0, \qquad (2.19)$$

لجميع قيم $j\in\{1,2,...,n-1\}$.

وبعد ذلك تمكن Kamps (1995a) باستخدام التحويل $X(j,n,\tilde{m},k)=F^{-1}(U(j,n,\tilde{m},k))$ على أساس دالة التوزيع الاحتمالية المتصلة اتصالا مطلقا $F(x)$ من الحصول علـى الدالـة الاحتمالية المشتركة للإحصاءات المرتبة المعممة لـ ـعدد n مـن المتغيـرات العـشوائية $X(j,n,\tilde{m},k)$ حيث $j=1,2,...,n$ التي تتبع أي توزيع احتمالي دالة كثافته الاحتمالية هي $f(x)$ ودالة توزيعه التراكمية هي $F(x)$ على الصورة:

$$f^{X(1,n,\tilde{m},k),\ldots,X(n,n,\tilde{m},k)}(x_1,\ldots,x_n)=C_{n-1}\left[\prod_{i=1}^{n-1}(1-F(x_i))^{m_i}f(x_i)\right] \times\left[(1-F(x_n))^{k-1}f(x_n)\right], \quad (2.20)$$

داخل المخروط $F^{-1}(0)<x_1\leq\ldots\leq x_n<F^{-1}(1)$.

ولجميع قيم $r\in\{1,2,\ldots,n\}$ تكون دالة كثافة الاحتمال المشتركة لأول r مـن الإحـصاءات المرتبة المعممة المعتمدة على دالة التوزيع الاحتمالية المتصلة اتصالا مطلقـا $F(x)$ ودالـة كثافة الاحتمال $f(x)$ على الصورة:

$$f^{X(1,n,\tilde{m},k),\ldots,X(r,n,\tilde{m},k)}(x_1,\ldots,x_r)=C_{r-1}\left[\prod_{i=1}^{r-1}(1-F(x_i))^{m_i}f(x_i)\right] \times\left[(1-F(x_r))^{\gamma_r-1}f(x_r)\right], \quad (2.21)$$

داخل المخروط $F^{-1}(0)<x_1\leq\ldots\leq x_r<F^{-1}(1)$.

حيث $C_{r-1}=\prod_{i=1}^{r}\gamma_i$ و γ_r سبق تعريفهما بالعلاقتين (2.18) و(2.19) على التوالي.

كذلك فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للإحصاء المرتب المعمـم ذي الترتيـب r ، $X(r,n,\tilde{m},k), r\geq 2$ يمكن أن تأخـذ أكثـر مـن شـكل اعتمـادا علـى قـيم المعـالم $\tilde{m}=(m_1,\ldots,m_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$ حيث $i,j\in\{1,2,\ldots,n-1\}$.

لهذا سوف نعتبر الحالتين الآتيتين:

<u>الحالة الأولى:</u>

عندما تكون $m_1=m_2=\ldots=m_{n-1}=m$ فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للإحصاء المرتب المعمم ذي الترتيب r ، $X(r,n,\tilde{m},k), r\geq 2$ تعطى بالعلاقة:

$$f_{X(r,n,m,k)}(x)=\frac{C_{r-1}}{(r-1)!}\left[1-F(x)\right]^{\gamma_r-1}f(x)\left[g_m(F(x))\right]^{r-1}. \quad (2.22)$$

ودالة كثافة الاحتمـال المـشروطة لـ $X_s\equiv Y$ حيـث $s=r+1,r+2,\ldots,n$ بمعلوميـة $X_r\equiv X$ تعطى بالعلاقة:

$$f(y\mid x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{k^{s-r}}{(s-r-1)!}\left[h_m(F(y))-h_m(F(x))\right]^{s-r-1} & \\ \qquad\times\dfrac{\left[1-F(y)\right]^{k-1}f(y)}{\left[1-F(x)\right]^{k}} & m=-1,\\ \dfrac{C_{s-1}}{(s-r-1)!C_{r-1}}\left[h_m(F(y))-h_m(F(x))\right]^{s-r-1} & \\ \qquad\times\dfrac{\left[1-F(y)\right]^{\gamma_s-1}f(y)}{\left[1-F(x)\right]^{\gamma_{r+1}}} & m\neq-1,\end{cases} \tag{2.23}$$

حيث $\ell=r,s$, $C_{\ell-1}=\prod_{i=1}^{\ell}\gamma_i$ و γ_i سبق تعريفهما بالعلاقتين (2.18) و(2.19) على التوالي.

$$h_m(x)=\begin{cases}-\ln(1-x), & m=-1,\\ -\dfrac{1}{(m+1)}(1-x)^{m+1}, & m\neq-1,\end{cases} \tag{2.24}$$

$$g_m(x)=h_m(x)-h_m(0),\ x\in[0,1). \tag{2.25}$$

<u>الحالة الثانية:</u>

عندما $\gamma_i\neq\gamma_j, i\neq j$ لجميع قيم $i,j\in\{1,2,...,n-1\}$ فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء المرتب المعمم ذي الترتيب r في حالة $\tilde{m}=(m_1,...,m_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$ على أساس دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ ودالة كثافة الاحتمال $f(x)$ تعطى بالعلاقة:

$$f_{X(r,n,\tilde{m},k)}(x)=C_{r-1}f(x)\sum_{i=1}^{r}a_i(r)(1-F(x))^{\gamma_i-1},\ 1\le r\le n. \tag{2.26}$$

ودالة كثافة الاحتمال المشروطة لـ $X_s\equiv Y$ حيث $s=r+1,r+2,...,n$ بمعلومية $X_r\equiv X$ حيث $X\le Y$ تعطى بالعلاقة:

$$f(y\mid x,\theta)=\frac{C_{s-1}}{C_{r-1}}\sum_{i=r+1}^{s}a_i^{(r)}(s)\left(\frac{1-F(y)}{1-F(x)}\right)^{\gamma_i}\left(\frac{f(y)}{1-F(y)}\right),1\le i\le r\le n, \tag{2.27}$$

حيث

$$a_i(r)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\frac{1}{(\gamma_j-\gamma_i)},\quad 1\le i\le r\le n, \tag{2.28}$$

و

$$a_i^{(r)}(s)=\prod_{\substack{j=r+1\\ j\neq i}}^{s}\frac{1}{(\gamma_j-\gamma_i)},\quad r+1\le i\le s. \tag{2.29}$$

إن نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة كما أشير إليه مسبقا يحتوي العديد من نماذج العينات العشوائية كحالات خاصة وسوف نوضح ذلك لبعض منها فيما يلي:

- الإحصاءات المرتبة العادية $X_{1:n} \le ... \le X_{r:n}$ من العينة $X_1,...,X_r$ ذات الحجم r من دالة التوزيع التراكمية $F(.)$ هي إحصاءات مرتبة معممة بالقيم: $m_1 = ... = m_{r-1} = 0$ و $k = 1$ بالتالي $\gamma_r = n - r + 1$ حيث $r \in \{1,...,n-1\}$.
- القيم المسجلة العليا والمستخلصة من المتتابعة $\{X_r, r \ge 1\}$ هي إحصاءات مرتبة معممة بالقيم: $m_1 = ... = m_{r-1} = -1$ و $k = 1$ بالتالي $\gamma_r = 1$.
- القيم المسجلة العليا من الرتبة k ولتكن $Y_1^{(k)},...,Y_r^{(k)}$ هي إحصاءات مرتبة معممة بالقيم: $m_1 = ... = m_{r-1} = -1$ و $\gamma_r = k$ حيث $k \ge 1$ و $r \in \{1,2,...,n-1\}$.
- الإحصاءات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني $X_{1:r:n}^{(\tilde{R})},...,X_{r:r:n}^{(\tilde{R})}$ حيث $\tilde{R} = (R_1,...,R_r)$ و $R_i \in \mathbb{N}_0$ و $1 \le i \le r-1$ هي إحصاءات مرتبة معممة بالقيم: $m_i = R_i$ لقيم $1 \le i \le r-1$ و $\gamma_r = R_r + 1$ حيث $r \in \{1,2,...,n-1\}$.
- قيم بفيفر المسجلة العليا ولتكن $X_1,...,X_r$ هي احصاءات مرتبة معممة بالقيم: $m_i = \beta_i - \beta_{i+1} - 1$ حيث $i = 1,...,r-1$ و $\gamma_r = \beta_r$ و $r \in \{1,2,...,n-1\}$.
- الإحصاءات المرتبة المتتالية هي إحصاءات مرتبة معممة بالقيم: $m_i = (n-i+1)\alpha_i - (n-i)\alpha_{i+1} - 1,\ i = 1,2,...,n-1,\ k = \alpha_n$ ويكون $\gamma_r = (n-r+1)\alpha_r$, $1 \le r \le n-1$ حيث $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ هي أعداد حقيقية موجبة.

(٢-٢-٨) الإحصاءات المرتبة المعممة المقابلة

Dual generalized order statistics

يعتبر نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة المقابلة dual generalized order statistics تعميما للعديد من نماذج العينات المرتبة تنازليا مثل القيم المسجلة الدنيا lower record values والإحصاءات المرتبة العادية العكسية reversed ordered order statistics وقيم بفيفر المسجلة الدنيا lower Pfeifer records.

والجدير بالذكر أن جميع العلاقات الرياضية الخاصة بنموذج الإحصاءات المرتبة المعممة المقابلة يمكن الحصول عليها بسهولة من العلاقات الرياضية المقابلة لها في الإحصاءات المرتبة المعممة وذلك باستبدال الدالة $(1 - F(x))$ بالدالة $F(x)$.

للمزيد عن الإحصاءات المرتبة المعممة والإحصاءات المرتبة المعممة المقابلة يمكن الرجوع إلى:

Kamps (1995a, 1995b), Cramer (2003), Burkschat, Cramer and Kamps (2003), Arslan (2011).

ويقال أن المتغيرات العشوائية $X(1,n,\tilde{m},k),...,X(r,n,\tilde{m},k)$ إحصاءات مرتبة معممة مقابلة من التوزيع الاحتمالي الذي له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ و دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة لهذه المتغيرات على الصورة:

$$f^{X(1,n,\tilde{m},k),...,X(r,n,\tilde{m},k)}(x_1,...,x_r)=C_{r-1}\left[\prod_{i=1}^{r-1}(F(x_i))^{m_i}f(x_i)\right] \times\left[(F(x_r))^{\gamma_r-1}f(x_r)\right], \qquad (2.30)$$

داخل المخروط $F^{-1}(1)>x_1\geq...\geq x_r>F^{-1}(0)$.

حيث

$$n\in N,\ r\geq 2,\ \gamma_r\geq 1,\ \tilde{m}=(m_1,...,m_{r-1})\in\mathbb{R}^{r-1},$$

و $C_{r-1}=\prod_{i=1}^{r}\gamma_i$ و γ_i سبق تعريفهما بالعلاقتين (2.18) و(2.19) على التوالي.

نحصل من نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة المقابلة على الحالات الخاصة التالية:

- الإحصاءات المرتبة العادية العكسية $X_{1:n}\geq...\geq X_{r:n}$ من العينة $X_1,...,X_r$ ذات الحجم r من دالة التوزيع التراكمية $F(.)$ هي إحصاءات مرتبة معممة مقابلة بالقيم : $m_1=...=m_{r-1}=0$ و $k=1$ بالتالي $\gamma_r=n-r+1$ حيث $r\in\{1,...,n-1\}$.
- القيم المسجلة الدنيا والمستخلصة من المتتابعة $\{X_r, r\geq 1\}$ ذات المتغيرات العشوائية المستقلة والمتطابقة التوزيع هي إحصاءات مرتبة معممة مقابلة بالقيم: $m_1=...=m_{r-1}=-1$ و $k=1$ بالتالي $\gamma_r=1$ حيث $r\in\{1,2,...,n-1\}$.
- القيم المسجلة الدنيا من الرتبة k ولتكن $Y_1^{(k)},...,Y_r^{(k)}$ هي إحصاءات مرتبة معممة مقابلة بالقيم: $m_1=...=m_{r-1}=-1$ و $\gamma_r=k$ حيث $k\geq 1$ و $r\in\{1,2,...,n-1\}$.
- قيم بفيفر المسجلة الدنيا ولتكن $X_1,...,X_r$ هي احصاءات مرتبة معممة مقابلة بالقيم: $m_i=\beta_i-\beta_{i+1}-1$ حيث $i=1,...,r-1$ و $\gamma_r=\beta_r$ و $r\in\{1,2,...,n-1\}$.

(٢-٢-٩) مقاييس الصلاحية Measures of reliability

هناك العديد من مقاييس الصلاحية والتي تقاس بها صلاحية العنصر أو النظام خلال فترة زمنية معينة، نذكر منها:

١- دالة الصلاحية Reliability function

والتي تسمى أحيانا بدالة احتمال البقاء probability of survival function وتعرف على أنها القيمة الاحتمالية لأن يظل العنصر أو النظام يعمل بدون أعطال حتى الزمن t ويرمز لها بالرمز $S(t)$.

$$S(t) = \Pr[T > t] = \int_t^{\infty} f(v)\,dv = 1 - F(t), \qquad (2.31)$$

حيث T هو عمر العنصر، $f(t)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي T، $F(t)$ هي دالة التوزيع التراكمية.

٢- دالة معدل التعطل Hazard rate function

دالة معدل التعطل والتي تسمى أحيانا بدالة معدل الفشل failure rate function تلعب دورا هاما في وصف فشل أو تعطل الوحدة أو النظام تحت الاختبار، ومعدل التعطل عند الزمن t يرمز له بالرمز $h(t)$ ويعرف كالآتي:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \qquad , \quad 0 \le F(t) < 1. \qquad (2.32)$$

(٢-٢-١٠) نماذج الإجهاد - القوة

The stress – strength models

اكتسب مفهوم الإجهاد أو الضغط stress أهمية خاصة في النصف الثاني من القرن العشرين، فنحن جميعا نتعرض لضغوط أو إجهادات في حياتنا اليومية ولكن قد لا نملك القوة الكافية للتغلب على هذه الضغوط.

إن نموذج الإجهاد – القوة يدخل في مختلف مجالات الحياة وفي مختلف الظواهر من حولنا وله أهمية كبيرة في علم التربية وعلم النفس والطب وعلم الوارثة وفي الصناعات المختلفة وغيرها، وتعرف الصلاحية في هذه الحالة بأنها احتمال أن تتجاوز قوة العنصر الإجهاد الواقع عليه، ومن الأمثلة على هذا النموذج هو محرك الصاروخ، فإذا كانت X تمثل الحد الأقصى من الضغط المتولد عن اشتعال الوقود الصلب و Y تمثل قوة المحرك فإن

الصلاحية في هذه الحالة تعرف على أنها احتمال اطلاق محرك الصاروخ بنجاح، للمزيد عن نماذج الإجهاد – القوة يمكن الرجوع إلى Kotz, Lumelskii and Pensky (2003) .

بعض نماذج الإجهاد – القوة

أولا: نموذج الإجهاد- القوة $S_1 = P(Y < X)$

تعتبر مسالة دالة الصلاحية (الموثوقية) لنموذج الإجهاد – القوة من المسائل الهامة ذات التطبيقات العديدة في دراسات الصلاحية ومقارنة الظواهر الطبيعية، فإذا اعتبرنا أن النظام تحت الدراسة له قوة تحمل X وأثناء تشغيل هذا النظام كان الإجهاد المؤثر عليه ممثل بالمتغير المستقل Y فإن هذا النظام سيعمل بنجاح إذا كانت قوة تحمله أكبر من الإجهاد الواقع عليه وهذا ما يعبر عنه بدالة الصلاحية في الصورة $S_1 = P(Y < X)$، هناك دراسات عديدة استخدمت قيمة $S_1 = P(Y < X)$ لمقارنة ظاهرتين أو لقياس أفضلية منتج على منتج آخر، بمعنى لو افترضنا ان X تمثل زمن الحياة للمنتج A وكانت Y تمثل زمن الحياة للمنتج B، فإن المنتج A سيكون له الأفضلية عن المنتج B إذا كانت $S_1 = P(Y < X) > 1/2$.

وتعرف دالة الصلاحية S_1 في هذا النموذج بأنها احتمال أن يكون لدى العنصر قوة كافية للتغلب على الإجهاد الواقع عليه وتكتب رياضيا على الصورة:

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathrm{P}(Y < X), \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{2.33}$$

حيث $f(x,y)$ هي دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين العشوائيين X, Y.

وإذا كان X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين، وكانت دالتا التوزيع لهذين المتغيرين هما $F(x)$ و$G(y)$ على التوالي فإن العلاقة (2.33) تأخذ الصورة التالية:

$$\begin{aligned} S_1 &= E\left[P(Y < X \mid X)\right], \\ &= E\left[\int_0^x f(y)\,dy\right], \\ &= \int_0^\infty G(x) f(x)\,dx. \end{aligned} \tag{2.34}$$

ثانيا: نموذج الإجهاد- القوة $S_2 = P(X < Y < Z)$

هناك العديد من الأجهزة التي لا يمكن أن تعمل في درجات الحـرارة العاليـة، ولا يمكن أن تعمل أيضا في درجات الحرارة المنخفضة جدا. كذلك يجـب أن يقـع ضـغط دم الشخص بين حدين هما الضغط الانقباضي والضغط الانبساطي، في مثل هذه المسائل يكـون

من المناسب استخدام النموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$، ويتم حساب هذا النموذج اعتمادا على عينات مستقلة $(X_1,...,X_{n_1})$ و $(Y_1,...,Y_{n_2})$ و $(Z_1,...,Z_{n_3})$ كما يلي:

$$S_2 = P(X < Y) - P(X < Y, Z < Y). \qquad (2.35)$$

أو من العلاقة:

$$S_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y)\, dF_Y(y) - \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) F_Z(y)\, dF_Y(y). \qquad (2.36)$$

على القارئ المهتم الرجوع لكتاب kotz,Lumelskii and Pensky(2003) حيث يعتبر من أفضل وأحدث المراجع التي تناولت نماذج الإجهاد – القوة وتطبيقاتها المختلفة.

وحديثا قام الكثير من الباحثين بدراسة وتقدير نموذج الإجهاد - القوة بأشكاله المختلفة للعديد من التوزيعات الإحصائية باستخدام الطرق الكلاسيكية وطرق بييز اعتمادا على أنواع مختلفة من العينات العشوائية.

(٢-٢-١١) التقديرات الإحصائية Statistical estimations

يهتم فرع الاستدلال الإحصائي بصفة عامة بعمل بعض الاستدلالات الإحصائية عن مجتمع الدراسة وهذا المجتمع عادة ما يوصف بأحد التوزيعات الإحصائية والتي بدورها تعتمد على بعض المعالم التي تميز هذا المجتمع، من هذه الاستدلالات هو استخدام عينة من مفردات هذا المجتمع في الحصول على بعض التقديرات لمعالم المجتمع أو اختبار أحد الفرضيات حول هذه المعالم ... الخ. لذا يعتبر التقدير الإحصائي statistical estimation أحد أهم فروع الاستدلال الإحصائي حيث يمكننا من استنتاج بعض المعلومات الهامة عن معالم المجتمع التي يصعب معرفة قيمها بالضبط فنلجأ إلى تقدير هذه المعالم باستخدام عينات عشوائية مسحوبة من المجتمع موضع الدراسة.

وينقسم التقدير الإحصائي إلى قسمين هما:

أ- تقدير النقطة Point estimation

إذا أمكن تقدير المعلمة المجهولة بقيمة وحيدة فتسمى هذه القيمة بتقدير النقطة للمعلمة.

ب- تقدير الفترة Interval estimation

إذا أمكن تحديد فترة بحيث أن القيمة التقديرية للمعلمة المجهولة تقع داخل هذه الفترة بمستوى احتمالي معين، فإننا نقول في هذه الحالة بأننا قدرنا المعلمة بفترة، وقيمة المستوى الاحتمالي يعرف بدرجة الثقة.

وهناك اتجاهان بصفة عامة لإيجاد التقديرات الإحصائية:

(٢-٢-١١-١) الاتجاه الكلاسيكي Classical technique

في هذا الاتجاه يفترض أن معالم (أو معلمة) التوزيع الاحتمالي للمجتمع أو الظـاهرة تحت الدراسة **ثابتة** لكنها مجهولة ويراد إيجاد تقدير بنقطة أو بفترة ثقة لها وذلك من خـلال بيانات عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع. وهناك طرق متعددة للتقدير الكلاسيكي منها: طريقة الإمكان الأكبر maximum likelihood method، وطريقة العزوم moments method، وطريقة الانحرافات الصغرى least square method، ولكن تعتبر طريقة الإمكان الأكبر من أهم وأشهر الطرق المستخدمة في هذا الاتجاه، وسيتم التعرض لها في هذه الدراسـة بهـدف المقارنة.

تعريف مقدر الإمكان الأكبر:

يـسمى المقـدر $\underline{\hat{\theta}}=(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,...,\hat{\theta}_k)$ بمقـدر الإمكـان الأكبـر لمتجـة المعـالم $\underline{\theta}=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$ إذا كانت دالة الإمكان $\ell(\underline{x},\underline{\theta})$ تبلغ نهايتها العظمى عنده أي أن:

$$\ell(\underline{x},\underline{\hat{\theta}})\geq \ell(\underline{x},\underline{\theta})$$

لجميع قيم $\underline{\theta}$ ، بمعنى أن مقدر الإمكان الأكبر لـ $\underline{\theta}$ هو قيمة $\underline{\hat{\theta}}$ التي تعظم دالـة الإمكـان $\ell(\underline{x},\underline{\theta})$ أو لوغاريتم دالة الإمكان $L(\underline{x},\underline{\theta})$ حيث $L(\underline{x},\underline{\theta})=\ln(\ell(\underline{x},\underline{\theta}))$.

ونحصل عليه بحل معادلات الإمكان التالية آنيا

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}L(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k\mid\underline{x})=0,\quad i=1,2,...,k.$$

(٢-٢-١١-٢) الاتجاه البييزي Bayesian technique

أهم ما يميز هذا الاتجاه هو اعتبار أن معلمة (معالم) المجتمع تحت الدراسة **متغيـر (متغيرات)** عشوائية تتبع توزيعا معينا يسمى التوزيع القبلي، لكن بصفة عامة عند اسـتخدام طرق بييز في تحليل ظاهرة ما فإن هناك مشكلة في اتخاذ القرار حيث نواجه بموقف اختيار قرار decision أو إجراء action معين من بين مجموعة من الإجراءات في ظل عدم التأكـد uncertainty أو في ظل عدم وجود معلومات كاملة عن ظروف أو أحوال تـسـمى حالـة الطبيعة state of nature، فلو اتخذنا قرارا بأن إجراءا معينا من فراغ الإجراءات هو الـذي سيعبر عن القيمة الممكنة لحالة الطبيعة، فلا بد من التفكير في عواقب مثل هذا القرار، وهذه

تعتبر من أهم الصعوبات العملية في نظرية اتخاذ القرار decision theory، وهذا مـا يقودنـا إلى حتمية تقييم نتائج هذا الإجراء بناءا على مقياس كمي ولو بالتقريب حتـى يكـون هنـاك أساس نظري منطقي معقول لنظرية اتخاذ القرارات. لذلك سنفترض أن هناك دالة معطاة تبين الخسارة الناتجة من اتخاذنا لقرار أن: $\hat{\theta}$ هي مقدر للمعلمـة θ، أي سـنفترض أن الدالـة $L(\hat{\theta},\theta)$ تقيس الخسارة التي نتكبدها إذا اخترنا الإجراء $\hat{\theta}$ عندما تكون الطبيعة في الحالة θ وهذه الدالة هي ما تسمى بدالة الخسارة، وفي نظرية التقدير بعد تحديد دالة الخسارة المناسبة يكون هدفنا هو اختيار المقدر الذي يجعل مخاطرة بييز Bayes risk أقل ما يمكن عندما نقـدر المعلمة θ بالمقدر $\hat{\theta}$، أي أن **مقدر بييز** $\hat{\theta}$ هو قيمة θ التي تجعل القيمـة المتوقعـة لدالـة الخسارة بالنسبة للتوزيع البعدي أقل ما يمكن.

(٢-٢-١١-٢-١) التوزيعات القبلية والبعدية

Prior and posterior distributions

في الاتجاه الكلاسيكي non-Bayesian للاستدلال الإحصائي تعتبـر معلمـة (معـالم) التوزيع ثابتة ولكنها مجهولة، ولكن في الاتجاه البييزي ينظر إلى معلمة (معالم) التوزيع على أنها متغير عشوائي له توزيع احتمالي يحتوي على كل معلوماتنا حول المعلمة قبل الحصول على العينة العشوائية، هذا التوزيع يسمى التوزيع القبلي prior distribution وهناك أنـواع مختلفة للتوزيعات القبلية ومن أكثر التوزيعات القبلية استخداما في اسـتدلالات بييـز همـا التوزيعات القبلية المرافقة conjugate prior distributions والتوزيعات القبلية غيـر المعلمـة non- informative prior distributions.

- **التوزيعات القبلية المرافقة**

Conjugate prior distributions

يقال أن مجموعة التوزيعات الاحتمالية القبلية هي توزيعات قبلية مرافقـة للتوزيـع الاحتمالي الذي سحبت منه العينة العشوائية إذا كان التوزيع البعدي ينتمي إلى نفـس العائلـة التي ينتمي إليها التوزيع القبلي، وتسمى هذه الخاصية بخاصية الانغلاق تحت المعاينة.

- **التوزيعات القبلية غير المعلمة**

Non-informative prior distributions

وتسمى أحيانا بالتوزيعات القبلية الجاهلة ignorance priors وهي عبارة عن توزيعات احتمالية تعبر عن المعرفة القليلة أو شبه المعدومة لمعلمة (لمعالم) التوزيع قبل سحب العينة العشوائية. وهذه النوعية من التوزيعات القبلية تكون مناسبة للحالات التي تكون فيها المعلومات المتوفرة لدينا حول المعلمة قبل المعاينة ليست ذات أهمية مقارنة بالمعلومات المتوقع الحصول عليها من العينة العشوائية.

حالة المعرفة شبة المعدومة أو المعرفة المحدودة حول المعلمة تحتم علينا عدم التمييز بين القيم المختلفة الممكنة لهذه المعلمة أي إعطائها نفس الوزن والأهمية، وتوجد عدة طرق للتعبير عن التوزيعات القبلية غير المعلمة نذكر منها:

١- الطريقة المعتمدة على التوزيع المنتظم:

الحالة الأولى:

إذا كانت المعلمة θ تأخذ قيما في مدى محدود أو في المدى $(-\infty,\infty)$ فنختار لها توزيعا قبليا منتظما على هذه الفترة.

الحالة الثانية:

إذا كانت المعلمة θ تأخذ قيما في المدى $(0,\infty)$ نختار لها توزيعا قبليا منتظما للمعلمة $\ln\theta$ على الفترة $(-\infty,\infty)$.

٢- الطريقة المعتمدة على معلومات فشر:

وهذه الطريقة تعتمد على خاصية عدم الاختلاف invariance property والتي تنص على أن العنصر الاحتمالي في التوزيعات القبلية لا يتغير تحت تأثير التحويلات، واستخدام هذه القاعدة يؤدي إلى اختيار التوزيع القبلي $\pi(\theta)$ للمعلمة θ ليتناسب مع الجذر التربيعي الموجب لمعلومات فشر Fisher information في القراءة الواحدة أي أن:

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)} \quad ,$$

حيث $I(\theta)$ هي معلومات فشر المعرفة كالآتي:

$$I(\theta) = E\left(-\frac{d^2 \ln f(x;\theta)}{d\theta^2}\right) .$$

- **التوزيعات البعدية Posterior distributions**

التوزيع البعدي والذي سنرمز له بالرمز $\pi^*(\theta|\underline{x})$ للمعلمة θ هو توزيع احتمالي مشروط للمعلمة θ بشرط الحصول على العينة $\underline{x}$ وهو يصف درجة اعتقادنا في القيم الممكنة للمعلمة بعد الحصول على العينة، ونحصل على التوزيع البعدي باستخدام نظرية بييز Bayes theory، حيث أن المعلومات المحتواة في العينة يمكن تلخيصها في دالة الإمكان $l(\theta|\underline{x})$ ، لذلك يمكن استخدام التوزيع القبلي $\pi(\theta)$ ودالة الإمكان $l(\theta|\underline{x})$ لحساب التوزيع البعدي $\pi^*(\theta|\underline{x})$ على الصورة:

$$\pi^*(\theta|\underline{x}) = \frac{\pi(\theta)l(\theta|\underline{x})}{\int_\theta \pi(\theta)l(\theta|\underline{x})d\theta} \quad ,$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$$\pi^*(\theta|\underline{x})\,\alpha\;\; \pi(\theta)l(\theta|\underline{x}). \qquad (2.37)$$

والجدير بالذكر أن التوزيع البعدي في الاتجاه البييزي يلعب دورا مشابها لدالة الإمكان في الاتجاه الكلاسيكي.

(٢-٢-١١-٢-٢) دوال الخسارة Loss functions

على ضوء ما سبق فإن دالة الخسارة تلعب دورا جوهريا في طرق بييز للتحليل الإحصائي، وقد لاحظنا من خلال قراءاتنا في مجال التقديرات الإحصائية باستخدام طرق بييز ميل الكثير من الباحثين لاستخدام دالة خسارة مربع الخطأ squared error كدالة خسارة نظرا لسهولة الحصول على المقدرات المعتمدة عليها (حيث أن مقدر بييز للمعلمة في هذه الحالة هو متوسط التوزيع البعدي لهذه المعلمة)، ولكن هذا الاتجاه عارضه الكثير من الباحثين أيضا حيث أن طبيعة دالة مربع الخطأ - وهي دالة تربيعية متماثلة - تعطي أهمية متساوية لحالتي التقدير الأعلى والأدنى، وهذا يتعارض مع ما هو معلوم من أن التقديرات العليا overestimations مثلا في حالة دالة الصلاحية عادة ما تكون ذات خطورة أكبر عنها في حالة التقديرات الدنيا underestimations، أيضا التقديرات الدنيا في نتائج معدل التعطل تكون ذات خطورة أكبر عنها في حالة التقديرات العليا، هذا ما أكده الباحثون في Basu and Ebrahimi (1991) and Ren, Sun and Dey (2006) لذا سنحاول من خلال هذه الدراسة أخذ هذه الجزئية بعين الاعتبار وذلك باستخدام دالة الخسارة المتوازنة balanced

والتي تحتوي على دالة خسارة مربع الخطأ ودالة الخسارة الخطيـة الأسـية loss function كحالات خاصة.

- **دالة خسارة مربع الخطأ**

Squared error loss function

عند تقدير المعلمة θ بالمقدر $\hat{\theta}$ فإن دالة خسارة مربع الخطأ SE تكون في الصورة:

$$L_1(\hat{\theta},\theta) \propto (\hat{\theta}-\theta)^2 \quad , \tag{2.38}$$

ومخاطرة بييز أو القيمة المتوقعة البعدية posterior expectation لهذه الدالة:

$$Risk\,(\hat{\theta}) = E[L_1(\hat{\theta},\theta)|\underline{x}] = E[(\hat{\theta}-\theta)^2|\underline{x}]. \tag{2.39}$$

ومقدر بييز للمعلمة θ اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ هو قيمـة $\hat{\theta}_{BS}$ التـي تجعـل مخاطرة بييز في (2.39) أقل ما يمكن وعلى ذلك يكون:

$$\hat{\theta}_{BS} = E(\theta\,|\,\underline{x}) \ . \tag{2.40}$$

أي أن مقدر بييز للمعلمة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ هو " القيمة المتوقعـة لهـذه المعلمة بالنسبة للتوزيع البعدي لها ".

- **دالة الخسارة الخطية الأسية**

Linear-exponential loss function

عند تقدير المعلمة θ بالمقدر $\hat{\theta}$ فإن دالة الخسارة الخطية الأسية LINEX تكون في الصورة:

$$L_2(\Delta) \propto e^{a\Delta} - a\Delta - 1 \quad , \tag{2.41}$$

حيث $\Delta = (\hat{\theta}-\theta)$ و $a \neq 0$ ثابت يمثل معلمة الشكل للدالة $L_2(\Delta)$.

ومن أهم خواص هذه الدالة أنها غير متماثلة حول نقطة الأصل، حيث أنها تقترب في شكلها من شكل الدالة الأسية على أحد جانبي نقطة الأصل وتقترب من الشكل الخطي على الجانب الآخر. معلمة الشكل a تتحكم في درجة واتجاه عدم التماثل للدالة، حيث أن قيمة المعلمة a العددية تتحكم في درجة عدم التماثل لدالة الخسارة، أما إشارة المعلمة a فتعكس اتجاه عـدم التماثل. بمعنى أنه لقيم $a > 0$ فإن التقدير الأعلى يكون أكثر خطورة من التقـدير الأدنـى، والعكس أيضا صحيح، بمعنى أنه لقيم $a < 0$ يكون التقدير الأدنى أكثر خطورة من التقـدير

الأعلى. ولقيم $|a|$ الصغيرة جدا تؤول دالة الخسارة الخطية الأسية إلى دالة خسارة مربع الخطأ وتكون متماثلة.

تعطى مخاطرة بييز من:

$$Risk\,(\hat{\theta}) = E\,[L_2(\Delta)\,|\,\underline{x}\,] \propto e^{a\hat{\theta}}E\,[e^{-a\theta}\,|\,\underline{x}\,] - a[\hat{\theta} - E\,(\theta\,|\,\underline{x}\,)] - 1 \;. \qquad (2.42)$$

ويكون مقدر بييز $\hat{\theta}$ للمعلمة θ هو قيمة $\hat{\theta}$ التي تجعل الطرف الأيمن من العلاقة (2.42) أقل ما يمكن، وتعطى في الصورة:

$$\hat{\theta}_{BL} = -\frac{1}{a}\ln[E\,(e^{-a\theta}\,|\,\underline{x}\,)] \;, \qquad (2.43)$$

بشرط وجود ومحدودية التوقع $E\,(e^{-a\theta})$.

هناك العديد من أشكال الدالة الخطية الأسية والتي تعتمد على طريقة اختيار شكل Δ في العلاقة (2.41).

استخدم الكثير من الباحثين دالة الخسارة الخطية الأسية بأشكالها المختلفة للحصول على استدلالات بييز لمختلف التوزيعات الإحصائية. لمعرفة المزيد عن دالة الخسارة الخطية الأسية يمكن الرجوع إلى Varian (1975) and Zellner(1986).

- **دالة الخسارة المتوازنة**

Balanced loss function

دالة الخسارة المتوازنة BLF كما قدمها Zellner (1994) يمكن كتابتها على الصورة:

$$L^q_{\rho,\omega,\xi}(\Upsilon(\theta),\delta) = \omega q\,(\theta)\rho(\xi,\delta) + (1-\omega)q\,(\theta)\rho(\Upsilon(\theta),\delta), \qquad (2.44)$$

حيث δ هو تقدير المعلمة $\Upsilon(\theta)$، ξ هو تقدير مسبق أو سابق للمعلمة $\Upsilon(\theta)$، $\omega \in [0,1)$، $\rho(\Upsilon(\theta),\delta)$ هي دالة خسارة اختيارية لتقدير $\Upsilon(\theta)$ بالمقدر δ و $q(.)$ دالة وزن موجبة مناسبة، يمكن الرجوع إلى Ahmadi et al. (2009a,b).

وفي هذه الدراسة سيتم استخدام دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة ودالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة ونحصل على كل منهما كما يلي:

دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

Balanced squared error loss function

نحصل على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة BSEL باختيار $\rho(\Upsilon(\theta),\delta)=(\delta-\Upsilon(\theta))^2$ و$q(\theta)=1$ في العلاقة (2.44) كما يلي:

$$L_{\omega,\xi}(\Upsilon(\theta),\delta)=\omega(\delta-\xi)^2+(1-\omega)(\delta-\Upsilon(\theta))^2, \tag{2.45}$$

ويعطى مقدر بييز لـ $\Upsilon(\theta)$ باستخدام دالة الخسارة $L_{\omega,\xi}(\Upsilon(\theta),\delta)$ من العلاقة:

$$\delta_{\omega,\Upsilon}(\underline{x})=\omega\xi(\underline{x})+(1-\omega)E[\Upsilon(\theta)\,|\,\underline{x}]. \tag{2.46}$$

مع ملاحظة أنه بوضع $\omega=0$ تؤول هذه الدالة إلى دالة خسارة مربع الخطأ التي سبق وصفها بالعلاقة (2.38).

دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

Balanced LINEX loss function

نحصل على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة BLINEX بمعلمة الشكل a حيث $(a\neq 0)$ باختيار $\rho(\Upsilon(\theta),\delta)=e^{a(\delta-\Upsilon(\theta))}-a(\delta-\Upsilon(\theta))-1$ و$q(\theta)=1$ في العلاقة (2.44) كما يلي:

$$L^*_{\omega,\xi}(\Upsilon(\theta),\delta)=\omega[e^{a(\delta-\xi)}-a(\delta-\xi)-1]+(1-\omega)[e^{a(\delta-\Upsilon(\theta))}-a(\delta-\Upsilon(\theta))-1], \tag{2.47}$$

ويكون مقدر بييز لـ $\Upsilon(\theta)$ اعتمادا على دالة الخسارة $L^*_{\omega,\xi}(\Upsilon(\theta),\delta)$ على الصورة:

$$\delta^*_{\omega,\xi}(\underline{x})=-\frac{1}{a}\ln[\omega e^{-a\xi(\underline{x})}+(1-\omega)E[e^{-a\Upsilon(\theta)}\,|\,\underline{x}]], \tag{2.48}$$

مع ملاحظة أنه بوضع $\omega=0$ تؤول هذه الدالة إلى دالة الخسارة الخطية الأسية التي سبق وصفها بالعلاقة (2.41).

يتضح مما سبق أن مقدرات بييز تعتمد في حسابها على القيم المتوقعة لدوال في المعالم اعتمادا على التوزيعات البعدية والتي غالبا ما تحتوي على تكاملات معقدة يصعب إيجاد قيمها حتى باستخدام طرق التكامل العددي المعروفة. وقد تمكن كل من Lindley(1980) and Tierney and Kadane(1986) من حل هذه المشكلة عن طريق تقريبات معقدة تستلزم شروطا معينة تم استخدامها من قبل الكثير من الباحثين ولكن كانت هناك كثير من الصعوبات التي لا يمكن التغلب عليها. وقد ظهرت طرق متعددة تجنبنا مشكلات

التكاملات المباشرة والتقريبات ومن أهم تلك الطرق هي طرق سلسلة ماركوف والتي تكتب مختصرة MCMC.

(٢-٢-١١-٢-٣) حسابات بييز باستخدام طرق سلسلة ماركوف

Bayesian computations using Markov chain Monte Carlo (MCMC) methods

سيتم في هذا البند وصف طرق سلسلة ماركوف وهي طرق للمحاكاة تم اسـتخدامها مؤخرا ويتم من خلالها توليد سلسلة من القيم العشوائية من التوزيعات الاحتماليـة ويمكـن استخدام هذه القيم في حساب المقدرات للمعالم المختلفة. وتعتمد هذه الطريقـة علـى توليـد سلسلة من القيم ولتكن $\theta^{(1)},...,\theta^{(N)}$ من التوزيع البعدي للمعلمة باستخدام القيمـة الإبتدائيـة $\theta^{(0)}$ وباستخدام نظرية ارجوديك Ergodic theorem فإن المقدر يعطى من العلاقة:

$$\hat{\phi} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi(\theta^{(i)}),$$

حيث $\phi_N \to E_\pi[\phi(\theta)]$ عندما $N \to \infty$.

ويلاحظ أن القيم المولدة في بداية السلسلة $\theta^{(1)},...,\theta^{(M)}$ تكون مرتبطة بالقيمة الإبتدائيـة $\theta^{(0)}$ وعليه فإنه يمكن الاستغناء عن تلك القيم عند حساب المتوسط وتسمى هذه العملية بـالحرق burn in وبالتالي يمكننا حساب مقدر بييز اعتمادا على القيم المتبقية من السلسلة كما يلي:

$$\hat{\phi} = \frac{1}{N-M}\sum_{i=M+1}^{N}\phi(\theta^{(i)}), \qquad (2.49)$$

حيث N هو طول سلسلة ماركوف و M هو عدد القيم المحذوفة من السلسلة وهو اختياري وغالبا ما يتم حذف أول ١٠% من قيم السلسلة.

ومن أشهر طرق سلسلة ماركوف هما:

١- معاينة جبس Gibbs sampler.

٢- الميتروبوليس-هاستنق Metropolis-Hastings.

وفيما يلي عرض موجز لخوارزمية كل منهما:

خوارزمية معاينة جبس

Gibbs sampler algorithm

ظهرت معاينة جـبس التـي قـدمها Geman and Geman (1984) فـي العمليـات التصويرية image processing وهي شائعة الاستخدام في استدلالات بييـز بـصفة عامـة،

وتعتبر خوارزمية معاينة جبس واحدة من أسهل خوارزميات طرق سلسلة ماركوف ويمكن عرضها بسهولة كما يلي:

بفرض أن $\underline{\theta}=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$ هو متجه المعالم وأن التوزيعات البعدية المشروطة لهذه المعالم هي $\pi_i^*(\theta_i \mid (\underline{\theta}-\{\theta_i\}),\underline{x})$ حيث $i=1,2,...k$ وهي توزيعات إحصائية معروفة فإن الدورة الواحدة في خوارزمية معاينة جبس تكتمل بتوليد قيمة لكل معلمة من التوزيع البعدي المشروط الذي يحكمها باستخدام أحدث القيم للمعالم الأخرى ويمكن وصف هذه الخوارزمية رياضيا كما يلي:

١- نفترض قيمة ابتدائية لمتجه المعالم $\underline{\theta}^{(0)}=(\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)},...,\theta_k^{(0)})$.

٢- نضع $j=1$.

٣- يتم توليد قيمة للمعلمة θ_1 ولتكن $\theta_1^{(j)}$ من التوزيع البعدي المشروط $\pi_1^*(\theta_1 \mid (\underline{\theta}^{(0)}-\{\theta_1^{(0)}\}),\underline{x})$.

٤- يتم توليد قيمة للمعلمة θ_2 ولتكن $\theta_2^{(j)}$ من التوزيع البعدي المشروط $\pi_2^*(\theta_2 \mid \theta_1^{(1)},(\underline{\theta}^{(0)}-\{\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)}\}),\underline{x})$.

٥- يتم توليد قيمة للمعلمة θ_3 ولتكن $\theta_3^{(j)}$ من التوزيع البعدي المشروط $\pi_3^*(\theta_3 \mid \theta_1^{(1)},\theta_2^{(1)},(\underline{\theta}^{(0)}-\{\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)},\theta_3^{(0)}\}),\underline{x})$.

٦- نستمر على هذا المنوال حتى يتم توليد قيمة للمعلمة الأخيرة θ_k ولتكن $\theta_k^{(j)}$ من التوزيع البعدي المشروط $\pi_k^*(\theta_k \mid \theta_1^{(1)},...,\theta_{k-1}^{(1)},\underline{x})$.

٧- نضع $j=j+1$ ونكرر الخطوات من ٣ إلى ٦ حيث $j=1,2,...,N$.

خوارزمية المتروبوليس- هاستنق

Metropolis-Hastings algorithm

إذا كان $\underline{\theta}=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$ متجه المعالم وكانت التوزيعات البعدية المشروطة لهذه المعالم هي $\pi_i^*(\theta_i \mid (\underline{\theta}-\{\theta_i\}),\underline{x})$ حيث $i=1,2,...,k$ لا تنتمي لعائلة التوزيعات الإحصائية المعروفة وبالتالي لا يمكن التوليد منها بسهولة، في مثل هذه الحالات نلجأ إلى استخدام خوارزمية المتروبوليس – هاستنق والتي من خلالها يتم اقتراح توزيع احتمالي لكل معلمة تولد منه قيمها باستخدام أحدث قيمة لها. ويمكن وصف هذه الخوارزمية رياضيا كما يلي:

١- نفترض قيمة ابتدائية لمتجه المعالم $\underline{\theta}^{(0)}=(\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)},...,\theta_k^{(0)})$.

٢- نضع $j=1$.

٣- يتم توليد قيمة للمعلمة θ_i حيث $i=1,2,...,k$ ولتكن $\theta_i^{(j)}$ من توزيع مقترح propsal distribution وليكن $q_i(\theta_i^{(j)} \mid \theta_i^{(j-1)}, \underline{x})$.

٤- نحسب احتمال القبول كما يلي:

$$\varphi(\theta_i^{(j-1)}, \theta_i^{(j)}) = \min[1, \frac{\pi_i^*(\theta_i^{(j)} \mid \Theta^{(j)}, (\underline{\theta}^{(j-1)} - \{\theta_i^{(j-1)}, \Theta^{(j-1)}\}), \underline{x}) q(\theta_i^{(j-1)} \mid \theta_i^{(j)}), \underline{x})}{\pi_i^*(\theta_i^{(j-1)} \mid (\underline{\theta}^{(j-1)} - \{\theta_i^{(j-1)}\}), \underline{x}) q(\theta_i^{(j)} \mid \theta_i^{(j-1)}, \underline{x})}],$$

حيث $\Theta^{(j)} = \{\theta_{i-1}^{(j)}, \theta_{i-2}^{(j)}, ..., \theta_0^{(j)}\}, \theta_0^{(j)} = 0, i = 1,2,...,k.$

٥- نولد قيمة $U \sim U(0,1)$.

٦- إذا كان $U \le \varphi(\theta_i^{(j-1)}, \theta_i^{(j)})$ نقبل القيمة المقترحة $\theta_i^{(j)}$ ، خلاف ذلك نرفض القيمة المقترحة ونضع $\theta_i^{(j)} = \theta_i^{(j-1)}$.

٧- نضع $j = j+1$ ونكرر الخطوات من ٣ إلى ٦ حيث $j = 1,2,...,N$.

ملاحظة:

إذا كان التوزيع المقترح توزيع متماثل فإن

$$q(\theta_i^{(j-1)} \mid \theta_i^{(j)}, \underline{x}) = q(\theta_i^{(j)} \mid \theta_i^{(j-1)}, \underline{x}),$$

ويؤول احتمال القبول إلى الصورة التالية:

$$\varphi(\theta_i^{(j-1)}, \theta_i^{(j)}) = \min[1, \frac{\pi_i^*(\theta_i^{(j)} \mid \Theta^{(j)}, (\underline{\theta}^{(j-1)} - \{\theta_i^{(j-1)}, \Theta^{(j-1)}\}), \underline{x})}{\pi_i^*(\theta_i^{(j-1)} \mid (\underline{\theta}^{(j-1)} - \{\theta_i^{(j-1)}\}), \underline{x})}]$$

حيث $\Theta^{(j)} = \{\theta_{i-1}^{(j)}, \theta_{i-2}^{(j)}, ..., \theta_0^{(j)}\}, \theta_0^{(j)} = 0, i = 1,2,...,k$.

ومن أهم الأبحاث التي تناولت هذه الطريقة:

Bayarri, Castellanos and Morales (2006), Gupta, Mukherjee and Upadhyay (2008), Cramer and Hang Tran (2009) and Upadhyay and Gupta (2010).

(٢-٢-١٢) التنبؤات الإحصائية Statistical predictions

تعتبر التنبؤات الإحصائية أحد أهم الموضوعات في فرع الاستدلال الإحصائي لارتباطها المباشر بالناحية التطبيقية، وذلك لكثرة الاحتياج لنتائج مثل هذه التنبؤات في المجالات الصناعية والتجارية مثل اختبارات جودة الإنتاج وتحديد شهادات الضمان للمنتجات الصناعية المختلفة وغيرها من التطبيقات الهامة في مجال الطب والصيدلة وغيرها. تتلخص فكرة

التنبؤ الإحصائي بصفة عامة في كيفية الاستفادة من معلومة مستمدة من عينة متاحة informative sample للتنبؤ بمعلومة تخص عينة مستقبلية future sample، والعينتان تتبعان نفس التوزيع الاحتمالي، وعادة إذا أمكن تحديد فترة بمستوى احتمالي معين بحيث تحتوي هذه الفترة على المعلومة المطلوبة عن العينة المستقبلية فتسمى هذه الفترة بفترة التنبؤ prediction interval، مثل هذه الفترات تكون ذات أهمية كبيرة في النواحي التطبيقية، سيتم التركيز في هذه الدراسة على استخدام طرق بييز في التنبؤ Bayes prediction.

- **تنبؤ بييز Bayes prediction**

بفرض عينة عشوائية $\underline{X}=(X_1, X_2,..., X_n)$ حجمها n تخضع للتوزيع الاحتمالي $f(x;\theta)$ حيث $\theta\in\Omega$، Ω هي فراغ المعالم لهذا التوزيع. وبفرض أن $\underline{Y}=(Y_1,Y_2,...,Y_m)$ تمثل عينة عشوائية مستقبلية مستقلة عن العينة السابقة حجمها m وتخضع لنفس التوزيع الاحتمالي، فإن دالة كثافة بييز التنبؤية Bayesian predictive density function للإحصاء $W(\underline{Y})$ تعرف كالآتي:

$$f(W\mid\underline{x})=\int_{\theta} f(W\mid\theta)\pi^*(\theta\mid\underline{x})\,d\theta\ , \qquad (2.50)$$

حيث $\pi^*(\theta\mid\underline{x})$ هي دالة الكثافة البعدية لمتجه المعالم، ولمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع إلى Aitchison and Dunsmore (1975).

وتكون فترة تنبؤ بييز للإحصاء $W(\underline{Y})$ بمستوى ثقة $100\tau\%$ هي $(L(\underline{x}),U(\underline{x}))$ بحيث:

$$\Pr[L(\underline{x})<W(\underline{Y})<U(\underline{x})]=\tau\ , \qquad (2.51)$$

حيث $L(\underline{x})$ و $U(\underline{x})$ هما الحدان الأدنى والأعلى لفترة تنبؤ بييز على الترتيب.

المعادلة (2.51) يمكن كتابتها على الصورة:

$$\left.\begin{aligned}\Pr[W(\underline{Y})>L(\underline{x})\mid\underline{x}]&=\frac{1+\tau}{2},\\ \Pr[W(\underline{Y})>U(\underline{x})\mid\underline{x}]&=\frac{1-\tau}{2}.\end{aligned}\right\} \qquad (2.52)$$

أنواع التنبؤ Types of predictions

هناك العديد من أشكال التنبؤات الإحصائية والتي تتحدد تبعا لنوعية المطلوب استنتاجه من دراسة التنبؤ، وتعتمد أشكال التنبؤ أساسا على نوعية العينة المتاحة من حيث كونها عينة كاملة أو مراقبة وكذلك على خصائص وشكل العينة المراد التنبؤ بها. ففي بعض

تجارب اختبارات الحياة يسجل مصمم التجربة أزمان الفشل لبعض وحدات التجربة ويرغب في عمل تنبؤ عن الوحدات التي سيتم فشلها فيما بعد، وهذا ما يعرف بتنبؤ العينة الواحدة. أيضا إذا رغب مصمم التجربة في التنبؤ ببعض أو بكل أزمان الفشل لعينة أخرى مستقلة عن العينة الأولى ومن نفس الوحدات تحت التجربة فإنه يكون بصدد ما يعرف بتنبؤ العينتين. وقد نحتاج أيضا في الحياة العملية إلى التنبؤ بوسط أو وسيط أو مدى عينة مستقبلية وذلك اعتمادا على عينة سابقة كاملة أو مراقبة، وغير ذلك من أشكال التنبؤات الإحصائية.

عن التنبؤات الإحصائية بصفة عامة يمكن الرجوع لكتابي:

Aitchison and Dunsmore (1975) and Geisser (1993).

أولا: تنبؤ العينة الواحدة One-sample prediction

بفرض أن $X(1,n,\tilde{m},k), X(2,n,\tilde{m},k),...,X(r,n,\tilde{m},k)$ هي أول r من الإحصاءات المرتبة المعممة التي تم تسجيلها من عينة حجمها n ويحكمها التوزيع الاحتمالي $f(x;\theta)$، في هذه الحالة فإن التنبؤ سيكون لأحد الإحصاءات المرتبة المعممة المتبقية ذات الحجم $(n-r)$ ولتكن $X(r+1,n,\tilde{m},k), X(r+2,n,\tilde{m},k),...,X(n,n,\tilde{m},k)$ حيث $\tilde{m}=(m_1,...,m_{n-1}), k>0$.

باعتبار أن $X_s = X(s,n,\tilde{m},k)$ تعبر عن المشاهدة المستقبلية ذات الترتيب s حيث $s=r+1,r+2,...,n$ فإن دالة كثافة الاحتمال المشروطة للمشاهدة X_s بشرط وجود المشاهدات $X_1,X_2,...,X_r$ تعطى من العلاقة (2.23) و (2.27) وذلك لقيم $\tilde{m}$ المختلفة.

ثانيا: تنبؤ العينتين Two-sample prediction

بفرض أن $X(1,n,\tilde{m},k), X(2,n,\tilde{m},k),...,X(n,n,\tilde{m},k)$ حيث $\tilde{m}=(m_1,...,m_{n-1}),$ $k>0$ هي عينة عشوائية ذات حجم n مختارة من مجتمع يحكمه التوزيع الاحتمالي $f(x;\theta)$ وبفرض أن $Y(1,N,\tilde{M},K), Y(2,N,\tilde{M},K),...,Y(N,N,\tilde{M},K)$ حيث $\tilde{M}=(M_1,...,M_{N-1}), K>0$ هي عينة عشوائية مستقبلية ومستقلة عن العينة الأولى وتتبع نفس التوزيع الاحتمالي، والمطلوب هو إيجاد تنبؤ بييز لأي قيمة من قيم العينة المستقبلية.

فإذا افترضنا أن $Y_s = Y(s,N,\tilde{M},K), 1 \le s \le N$ تعبر عن الإحصاء المرتب المعمم ذي الترتيب s من العينة المستقبلية ذات الحجم N فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشية لهذا الإحصاء بمعلومية المعلمة (المعالم) θ تكون في الصورة:

$$f(y_s \mid \theta)=\begin{cases} \dfrac{K^s}{(s-1)!}\left[1-F(y_s)\right]^{K-1} f(y_s)\left[g_M(F(y_s))\right]^{s-1}, & M=-1, \\ \dfrac{C_{s-1}^*}{(s-1)!}\left[1-F(y_s)\right]^{\Upsilon_s-1} f(y_s)\left[g_M(F(y_s))\right]^{s-1}, & M\neq -1, \end{cases} \tag{2.53}$$

حيث $g_M(.)$ سبق تعريفها بالعلاقة (2.25).

و

$$\left.\begin{aligned} C_{s-1}^* &= \prod_{i=1}^{s}\Upsilon_i\,, \\ \Upsilon_i &= K+N-j+\sum_{i=j}^{N-1}M_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.54}$$

وفي الحالة التي يكون فيها $\Upsilon_i \neq \Upsilon_j, i\neq j$ لجميع قيم $i,j\in\{1,2,...,n-1\}$ فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للإحصاء المرتب ذي الترتيب s من العينـة المـستقبلية ذات الحجـم N بمعلومية المعلمة (المعالم) θ تكون على الصورة:

$$f(y_s \mid \theta)=C_{s-1} f(y_s)\sum_{i=1}^{s} a_i^*(s)(1-F(y_s))^{\Upsilon_i-1},\ 1\le s\le N\,, \tag{2.55}$$

حيث

$$a_i^*(s)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}\frac{1}{(\Upsilon_j-\Upsilon_i)},\quad 1\le i\le s\le N\,. \tag{2.56}$$

(٢-٢-١٣) توليد العينات العشوائية Random samples generation

نظرا لأن دراستنا الحالية تعتمد بشكل أساسي على العينات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني والقيم المسجلة من الرتبة الأولى كحالات خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة، لذا سنوضح في هذا البند وبشيء من التفصيل كيفية الحصول على هذين النوعين من العينـات ليتم استخدامهما في إنجاز دراسة المحاكاة.

أولاً : كيفية توليد عينة مراقبة تتابعيا من النوع الثاني:

اعتمادا على الخصائص الرياضية لعينة من الإحصاءات المراقبة تتابعيا من التوزيـع المنتظم $U(0,1)$، يمكننا توليد عينة مرتبة مراقبة تتابعيا من النوع الثاني وذلك لنظام المراقبة $(R_1,R_2,...,R_r)$ من أي توزيع احتمالي له دالة التوزيع $F(.)$ باتباع الخطوات الآتيـة يمكن الرجوع إلى Balakrishnan and Sandhu (1995):

١- يتم توليد r من القيم المستقلة من التوزيع المنتظم $U(0,1)$ ولتكن $W_1,W_2,...,W_r$

٢- بوضع: $V_i = W_i^{1/\eta_i}; \quad \eta_i = (i + \sum_{j=r-i+1}^{r} R_j), \quad i = 1,2,...,r.$

٣- بوضع: $U_{i:r:n} = 1 - V_r V_{r-1} .. V_{r-i-1}; \quad i = 1,2,...,r.$

وبذلك فإن قيم : $U_{1:r:n}, U_{2:r:n}, ..., U_{r:r:n}$ الناتجة تمثل عينة مراقبة تتابعيا من النوع الثاني من التوزيع المنتظم $U(0,1)$ حجمها r مختارة عشوائيا من العينة ذات الحجم n على أساس نظام المراقبة التتابعية $(R_1, R_2, ..., R_r)$.

٤- أخيرا يتم وضع: $X_{i:n:r} = F^{-1}(U_{i:n:r}), \; i = 1,2,...,r$ ، حيث $F^{-1}(.)$ هي دالة التوزيع العكسية للتوزيع تحت الاعتبار.

بذلك فإن القيم الناتجة : $X_{1:r:n}, X_{2:r:n}, ..., X_{r:r:n}$ تمثل العينة المراقبة تتابعيا من النوع الثاني ذات الحجم r من التوزيع $F(.)$ والمختارة عشوائيا من العينة ذات الحجم n على أساس نظام المراقبة التتابعية $(R_1, R_2, ..., R_r)$.

ثانيا : كيفية توليد قيم مسجلة:

١- يتم توليد قيمة من التوزيع الاحتمالي تحت الاعتبار وتسجل على أنها القيمة المسجلة الأولى العليا (أو الدنيا) ولتكن x_1.

٢- نضع $j = 1$.

٣- بنفس الطريقة يتم توليد قيمة أخرى من نفس التوزيع الاحتمالي ولتكن y_j إذا كانت $y_j > (<) x_j$ فإننا نسجل $y_j = x_{j+1}$ على أنها القيمة المسجلة التالية العليا (الدنيا) وإلا نرفض القيمة المولدة ونضع $y_j = x_j$ ونكرر العملية حتى نسجل القيمة x_{j+1}.

٤- نضع $j = j + 1$ ونكرر الخطوة ٣ حيث $j = 2,...,r$.

وبذلك نكون قد حصلنا على عينة حجمها r من القيم المسجلة العليا (الدنيا).

(٣-٢) توزيع وايبل الأسي Exponentiated Weibull Distribution

يعتبر توزيع وايبل الأسي من التوزيعات الإحصائية الهامة والمعرفة حديثا حيث قدمه Mudholkar and Srivastava (1993) على أنه تعميم أو امتداد طبيعي لتوزيع وايبل الشهير، وتكمن أهمية هذا التوزيع في أن دالة معدل التعطل له تأخذ أشكالا مختلفة، فقد تكون ثابتة constant أو مطردة monotone تزايديه أو تناقصية أو غير مطردة

non-monotone مما يجعله مناسبا لدراسة وتغطية العديد من مشاكل توفيـق أزمنـة الحيـاة والصلاحية. كما أنه يحوي العديد من التوزيعات الاحتمالية كحالات خاصة.

دالة كثافة الاحتمال لتوزيع وايبل الأسي بالمعلمتين θ,α هي:

$$f(x) \equiv f(x;\alpha,\theta) = \alpha\theta x^{\alpha-1}e^{-x^{\alpha}}(1-e^{-x^{\alpha}})^{\theta-1}\ ,x>0,\alpha>0,\theta>0, \qquad (2.57)$$

حيث تمثل كل من α، θ معلـمة شـكل shape parameter.

ودالة التوزيع التراكمية تكون على الصورة:

$$F(x) \equiv F(x;\alpha,\theta) = (1-e^{-x^{\alpha}})^{\theta}\ ,\quad x>0. \qquad (2.58)$$

دالتا الصلاحية ومعدل التعطل لتوزيع وايبل الأسي عند أي زمن t تعطى على التوالي من العلاقتين:

$$S(t) = 1-(1-e^{-t^{\alpha}})^{\theta},\quad t>0, \qquad (2.59)$$

$$h(t) = \alpha\theta t^{\alpha-1}e^{-t^{\alpha}}(1-e^{-t^{\alpha}})^{\theta-1}[1-(1-e^{-t^{\alpha}})^{\theta}]^{-1},\quad t>0. \qquad (2.60)$$

وقد قدم Jiang and Murthy (1999) بعض خواص دالة معدل التعطل حسب قيم t:

- لقيم t الصغيرة فإن:

$$h(t) \cong \alpha\theta\, t^{\alpha\theta-1},$$

وهي دالة معدل التعطل لتوزيع وايبل العادي بمعلمة شكل $\alpha\theta$.

- أما بالنسبة لقيم t الكبيرة فإن سلوك دالة معدل التعطل لتوزيع وايبل الأسي هـو تقريبـا السلوك نفسه لدالة معدل التعطل لتوزيع وايبل العادي بمعلمة الشكل α.

وقد لخص Mudholkar, Srivastava and Friemer (1995) سلوك منحنى دالة معدل التعطـل لتوزيع وايبل الأسي فيما يلي:

١- تكون ثابتة $h(t)=1$ إذا كانت $\alpha=\theta=1$.

٢- تزايدية (تناقصية) إذا كانت $\alpha\ge 1$ و $\alpha\theta\ge 1$ ($\alpha\le 1$ و $\alpha\theta\le 1$).

٣- مقعرة bathtub shaped إذا كانت $\alpha>1$ و$\alpha\theta<1$.

٤- محدبة (وحيدة المنـوال) upside-down bathtub shaped (unimodal) إذا كانـت $\alpha<1$ و $\alpha\theta>1$. انظر شكل (٢-٣).

جدير بالذكر أنه عندما تكون:

١- $\theta=1$ فإن توزيع وايبل الأسي يؤول لتوزيع وايبل العادي ذي المعلمة الواحدة.

٢- $\alpha=1$ فإن نحصل على دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الأسي أسي المعياري.

٣- $\alpha = 1$ و $\theta = 1$ فإننا نحصل على التوزيع الأسي المعياري.

٤- $\alpha = 2$ نحصل على توزيع بير ذي المعلمة الواحدة من النوع العاشر one parameter Burr - X distribution.

وتكون دالة كثافة الاحتمال لتوزيع وايبل الأسي تناقصية عندما يكون $\alpha\theta \le 1$، بينما تكون وحيدة المنوال لقيم $\alpha < 1$ و$\theta > 1$ بحيث يتحقق $\alpha\theta > 1$ ، ويعطى منوال التوزيع من العلاقة:

$$Mode = [2(\alpha\theta - 1) / \alpha(\theta + 1)]^{1/\alpha}, \qquad (2.61)$$

كما أن

$$f(0) = \begin{cases} 0 & if \quad \alpha\theta > 1, \\ 1 & if \quad \alpha\theta = 1, \\ \infty & if \quad \alpha\theta < 1, \end{cases} \qquad (2.62)$$

و $f(\infty) = 0$ لجميع قيم $\alpha > 0$ و $\theta > 0$.

أما وسيط التوزيع فهو:

$$Median = [-\ln(1 - 2^{-(1/\theta)})]^{1/\alpha}. \qquad (2.62)$$

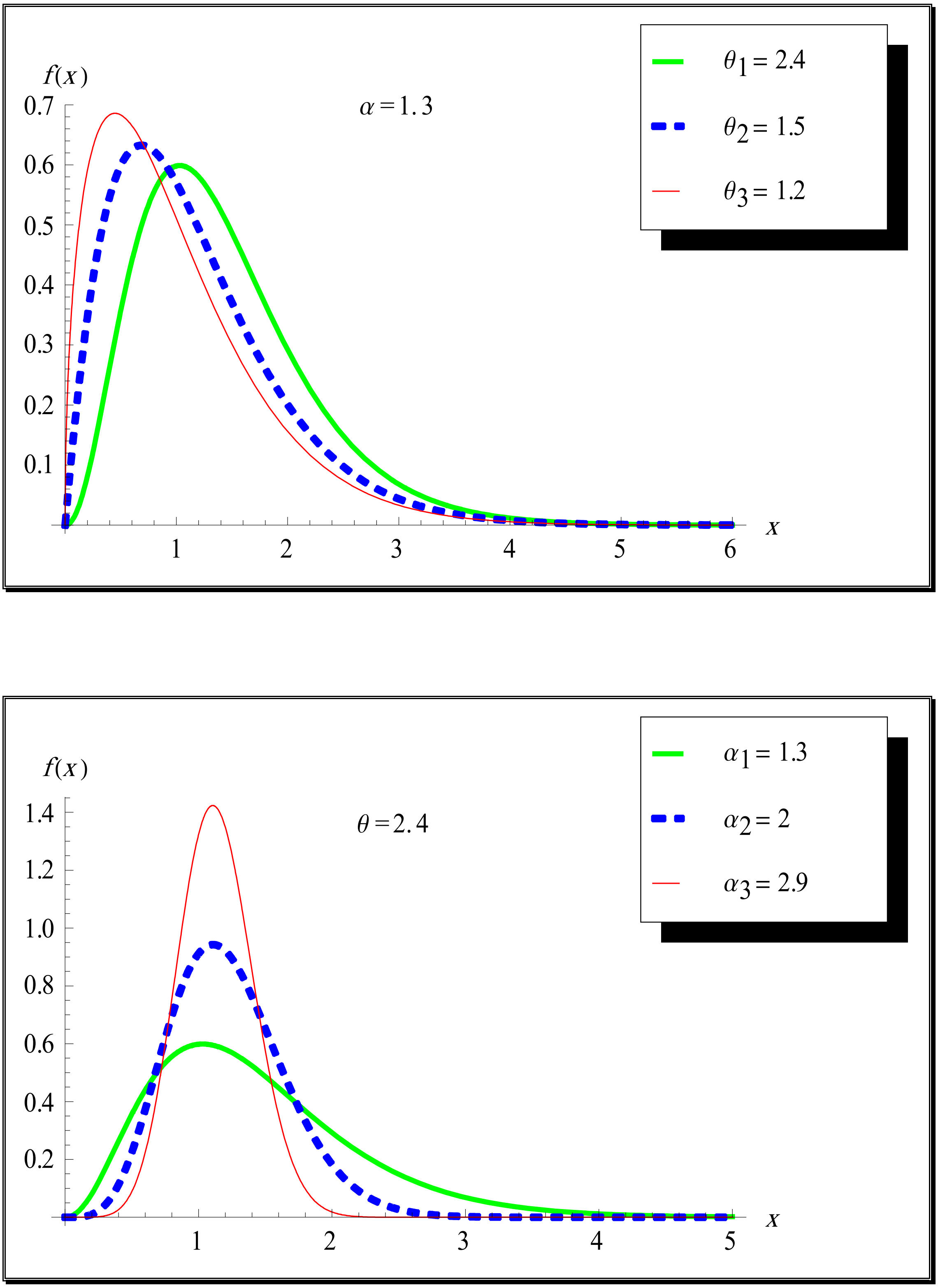
ونلاحظ أنه يمكن بسهولة توليد قيم عشوائية من توزيع وايبل الأسي باستخدام الطريقة المباشرة وهي:

$$If \quad F(x) = U \sim U(0,1) \Rightarrow X = [-\ln(1 - U^{1/\theta})]^{1/\alpha} \sim EW(\alpha, \theta) \qquad (2.63)$$

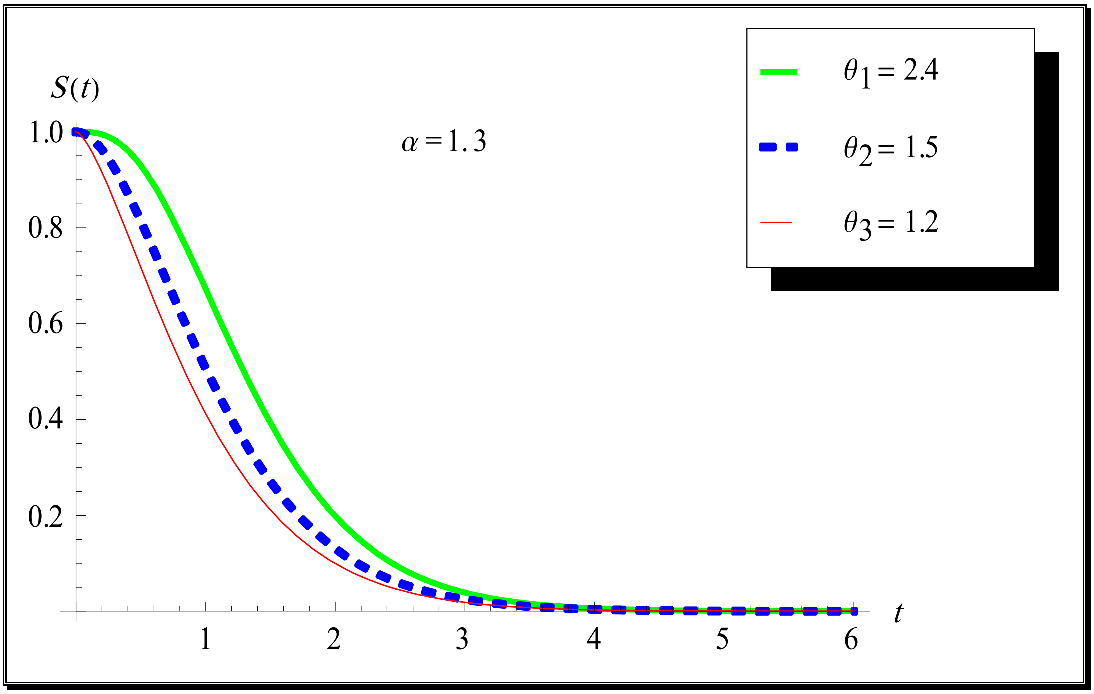
وقد تمت مناقشة العديد من الخصائص الإحصائية للتوزيع في:

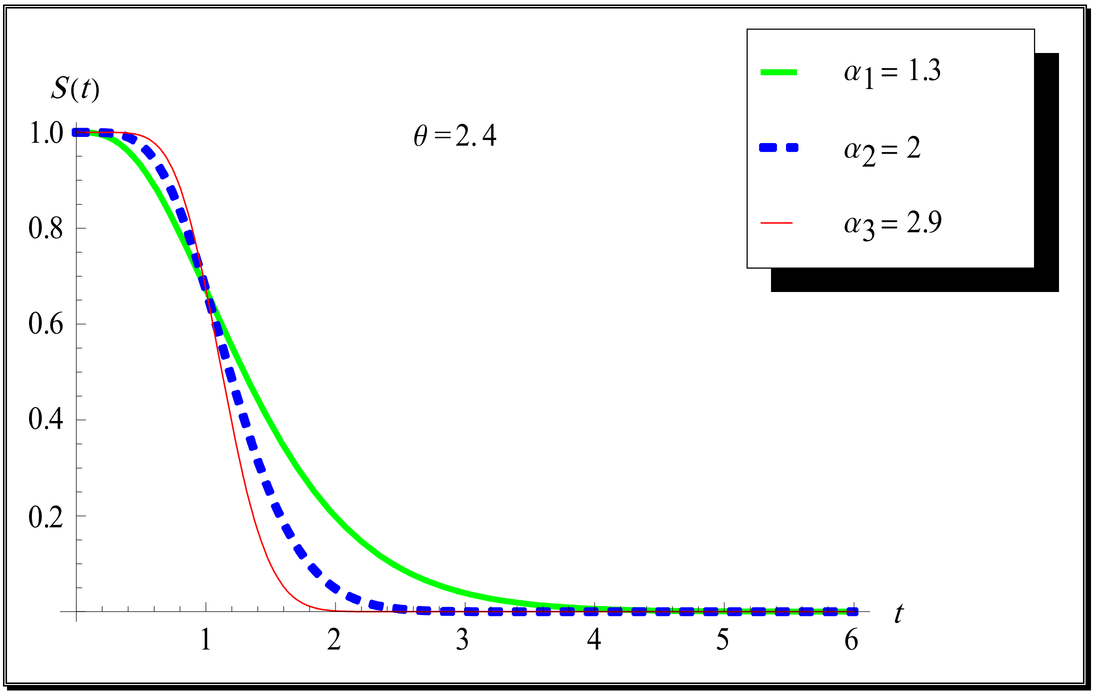
Mudholkar and Huston (1996), Jiang and Murthy (1999) and Nassar and Eissa (2003).

تم رسم دالة كثافة الاحتمال ودالة الصلاحية لتوزيع وايبل الأسي لقيم مختلفة للمعالم α,θ بغرض توضيح الشكل العام لهاتين الدالتين، أيضا لتوضيح مدى تأثر كل منهما بالتغير في معلمتي الشكل، حيث تم رسم شكل الدالة في حالة ثبوت معلمة مع تغير قيم المعلمة الأخرى والعكس والرسومات سيتم عرضها في الشكلين (٢-١) و(٢-٢).

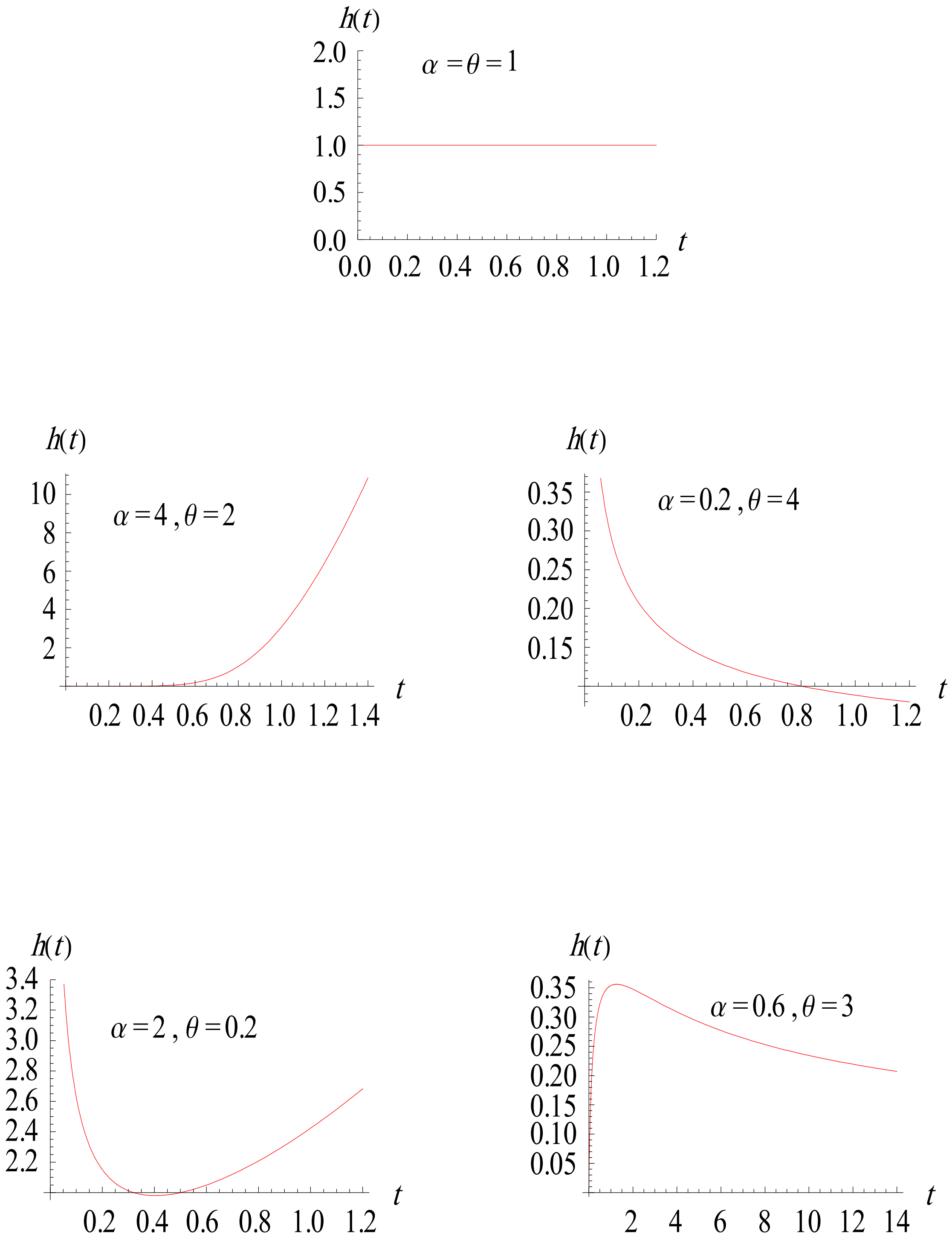


شكل (٢-١): دالة كثافة الاحتمال لتوزيع وايبل الأسي.





شكل (٢-٢): دالة الصلاحية لتوزيع وايبل الأسي.



شكل (٢-٣): دالة معدل التعطل لتوزيع وايبل الأسي.

(٢-٤) الدراسـات السـابقـة Previous Studies

إن موضوع الاستدلال الإحصائي باستخدام الطرق الكلاسيكية وطـرق بييـز مـن الموضوعات الثرية بالبحث والتطوير وتم تناوله من قبل العديـد مـن البـاحثين لمختلـف التوزيعات الإحصائية و تطبيقا على مختلف أنواع العينات العشوائية، لذا سنعرض من خلال هذا البند أهم الأبحاث التي تناولـت التقـديرات والتنبـؤات الإحـصائية والمعتمـدة علـى الإحصاءات المرتبة المعممة وبعض الحالات الخاصة منها مثل القـيم المـسجلة والعينـات المراقبة وكذلك بعضا من الأعمال التي استخدمت توزيع وايبل الأسي وكذلك دوال الخـسارة المختلفة وذلك باعتبار أن هذه النقاط من المحاور الأساسية في هذه الدراسة، فنجد أن:

- Balakrishnan and Kannan (2001) استخدم العينات المراقبة تتابعيا مـن توزيـع لوجيـستك Logistic distribution للحصول على مقدرات الإمكان الأكبر لمعلمتي التوزيع وتمت مناقشة بعض خواص هذه المقدرات.
- حصل Jye-Wu (2002) على مقدرات الإمكان الأكبر (بنقطة وبفترة) لمعالم توزيـع وايبل باستخدام العينات المراقبة تتابعيا، واستخدم بعض الأمثلة العددية لاختبار مـا توصل إليه من نتائج.
- أوجد Ali Mousa and Jaheen (2003) مقدرات بييز لمعالم ودالة الصلاحية لتوزيع بير من النوع الثاني عشر Burr-XII باستخدام البيانات المراقبة تتابعيا باستخدام طرق تقريبية.
- قام Singh ,Gupta and Upadhyay (2002) بتقدير معلمة الشكل لتوزيع وايبل الأسي باستخدام دوال الخسارة المختلفة.
- أوجد AL-Hussaini and Ahmad (2003a) فترات تنبؤ بييز لمجموعة مـن القـيم المسجلة المستقبلية.
- قدم AL-Hussaini and Ahmad (2003b) دوال كثافة بييز التنبؤية اعتمـادا علـى الإحصاءات المرتبة المعممة وذلك لنموذج معمم general class يحتوي على بعـض التوزيعات الاحتمالية الهامة مثل توزيع وايبل والتوزيع الأسي.
- حصل Jaheen (2003) على تنبؤ بييز لبيانات مراقبة تتابعيا من توزيـع جـومبرتز Gompertz ذي المعلمتين.

- تمكن Hossain and Zimmer (2003) من عمل بعض المقارنات لطرق التقدير الكلاسيكية المختلفة لمعالم توزيع وايبل باستخدام عينات كاملة ومراقبة من النوع الثاني واختبرا سلوك مختلف التقديرات باستخدام دراسة المحاكاة .
- درس Nassar and Eissa (2003) خصائص توزيع وايبل الأسي بشكل عام وقدم دراسة تفصيلية لمنوال التوزيع، ومتوسط الحياة المتبقية mean residual life .
- أوجد Nassar and Eissa (2004) مقدرات الإمكان الأكبر لمعلمتي الشكل ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل في حالة العينات الكاملة والعينات المراقبة من النوع الثاني إضافة إلى تقديرات بييز لمعلمتي الشكل ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل واستخدم تقريب لندلي لإيجاد مقدرات بييز عندما تكون معلمتا الشكل مجهولتين، وتمت المفاضلة بين هذه المقدرات عدديا باستخدام أسلوب المحاكاة.
- تناول Balakrishnan et al. (2004) دراسة بعض الاستدلالات الإحصائية لتوزيع جمبل Gumbel وذلك باستخدام العينات المراقبة تتابعيا، واستخدمت بعض الصيغ التقريبية لمقدرات الإمكان الأكبر، وقدمت بعض النتائج الهامة للعديد من صيغ العينات المراقبة تتابعيا.
- استخدم Jaheen (2004) أسلوب بييز العددي في التقدير والتنبؤ على أساس التوزيع الأسي المعمم باستخدام الإحصاءات المسجلة ودالتي خسارة مربع الخطأ والخسارة الخطية الأسية.
- درس Ahmadi, Doostparast and Parsian (2005) التقديرات والتنبؤات للتوزيع الأسي ذي المعلمتين اعتمادا على القيم المسجلة وباستخدام دالة الخسارة الخطية الأسية.
- تمكن Jaheen (2005a) من الحصول على مقدرات بييز لمعالم توزيع بير من النوع الثاني عشر اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة وخصص النتائج للبيانات المسجلة.
- قام Jaheen (2005b) بتقدير معالم الخليط المحدود من توزيعين من التوزيعات الأسية اعتمادا على القيم المسجلة.
- قدم Marks (2005) بعض التقديرات لمعالم توزيع وايبل في حالة العينات الكاملة، وتم عمل مقارنات بين المقدر الناتج ومقدرات الإمكان الأكبر ومقدرات المربعات الصغرى.

- استخدم Ng (2005) العينات المراقبة تتابعيا في الحصول على المقدرات الكلاسـيكية لتوزيع وايبل المطور modified Weibull ، واستخدم مصفوفة معلومات فـشر فـي الحصول على مقدرات الفترة التقريبية لمعالم التوزيع.
- قدم Soliman (2005) تقديرات الإمكان الأكبر وتقديرات بييز لمعالم توزيع بير الثاني عشر وكذلك تقديرات دالتي الصلاحية ومعدل التعطل لهذا التوزيع مستخدما في ذلك العينات المراقبة تتابعيا ودوال خسارة متماثلة وغير متماثلة.
- أوجد Singh, Gupta and Upadhyay (2005a) تقديرات الإمكان الأكبر وتقـديرات بييز لمعلمتي توزيع وايبل الأسي باستخدام دوال خسارة متماثلة وغير متماثلة اعتمادا على عينات مراقبة تتابعيا من النوع الثاني.
- حصل Singh, Gupta and Upadhyay (2005b) علـى تقـديرات الإمكـان الأكبـر وتقديرات بييز لمعالم توزيع وايبل الأسي ذي الثلاث معالم باسـتخدام دوال خـسارة متماثلة وغير متماثلة اعتمادا على عينات مراقبة تتابعيا من النوع الثاني.
- تمكن Ahmadi and Doostparast (2006) من الحصول على مقدرات بييز لعائلـة من التوزيعات الأسية بمعلمتين اعتمادا على القيم المسجلة العليا، كما تم إيجاد تنبؤات بييز بنقطة وبفترة وتم عمل بعض الحسابات العددية لتوضيح النتائج.
- أوجد Malinowska, Pawlas and Szynal (2006) تقديرات معلمتي المكان والقياس لتوزيع بير الثاني عشر اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة.
- تمكّن Soliman (2006) من استخدام العينات المراقبة تتابعيا في الحصول على بعض الاستدلالات الإحصائية لخليط محدود من توزيع رايلي Rayleigh مع بعض الأمثلـة التطبيقية.
- درس Soliman, Abd – Ellah and Sultan (2006) اسـتدلالات بييـز (تقـديرات وتنبؤات) لتوزيع وايبل ذي المعلمتين اعتمادا على القيم المـسجلة وباسـتخدام دوال خسارة متماثلة وغير متماثلة.
- أوجد Soliman and AL-kahlout (2006) مقدرات بييز لمعلمتي توزيـع لوجيـستك علاوة على مقدرات بييز لدالتي الصلاحية ومعدل التعطل وذلك باسـتخدام عينـات مراقبة تتابعيا ودالة خسارة غير متماثلة (دالة الخسارة الخطية الأسية)، وتم مقارنـة سلوك المقدرات الناتجة بمقدرات الإمكان الأكبر باستخدام دراسة المحاكاة.

- أوجد Ahmad, Jaheen and Yousef (2008) مقدرات بييز لنموذج الإجهاد - القـوة لتوزيع باريتوPareto اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة مـستخدمين طريقـة تقريب لندلي ودوال خسارة متماثلة وغير متماثلة.
- قدر Baklizi (2008a) نموذج الإجهاد - القوة اعتمادا على القيم المسجلة من التوزيع الأسي ذي المعلمة الواحدة وأيضا التوزيع الأسي ذي المعلمتين.
- قدر Baklizi (2008b) نموذج الإجهاد – القوة اعتمادا على القيم المسجلة الدنيا مـن التوزيع الأسي المعمم.
- ناقش Chan et al. (2008) بعض الاستدلالات الإحـصائية لنمـوذج انحـدار القـيم المتطرفة extreme-value regression model اعتمادا على عينات مراقبة من النـوع الثاني وتم الحصول على مصفوفة التباينات والتغـايرات التقريبيـة مـن معكـوس مصفوفة معلومات فشر، وتم تقريب مقدرات الإمكان الأكبـر و حـساب مـصفوفة التباينات والتغايرات التقريبية أيضا لهذه المقدرات، كما تم حـساب فتـرات الثقـة اعتمادا على مقدرات الإمكان الأكبر، واستخدم أسلوب المحاكـاة لدراسـة التحيـز والتباين لهذه المقدرات وتم عرض مثال تطبيقي لتوضيح الناحية التطبيقية للنتائج.
- قدم Fei Wu (2008) تقديرات الفترة لمعلمتي توزيع باريتو اعتمادا على عينات ذات مراقبة مزدوجة من النوع الثاني وأوجد بعض المقارنات العددية باسـتخدام أسـلوب المحاكاة كما أوجد فترات تنبؤ بييز للمشاهدات المستقبلية.
- أوجد Kundu and Gupta (2008) مقدرات بييز لمعلمتي التوزيـع الأسـي المعمـم بافتراض توزيع جاما توزيعا قبليا لكل من معلمتي الشكل والقياس واستخدم تقريـب لندلي للحصول على المقدرات التقريبية كما تم استخدام معاينة جبس للتقريب أيـضا، وتم إيجاد مقدرات بييز أيضا بافتراض توزيعات قبلية غير معلمة لمعلمتـي الـشكل والقياس، وتمت مقارنة مقدرات بييز بمقدرات الإمكان الأكبر باستخدام محاكاة مونت كارلو Monte Carlo simulation، وزود البحث بمثال تطبيقي باستخدام أحد العينـات الحقيقية (من واقع تجربة فعلية) لتوضيح الأهمية والكيفية التطبيقية لما تم التوصـل إليه من نتائج.
- قام Raqab, Madi and Kundu (2008) بتقدير نموذج الإجهاد - القوة للتوزيع الأسي المعمم ذي الثلاث معالم باستخدام طرق بييز والإمكان الأكبر اعتمادا على البيانـات المرتبة.

- تمكـن Sultan, Al-Dayian and Mohammad (2008) مـن حـساب المتوسـطات والتباينات والتغايرات للقيم المسجلة الدنيا الناشئة من توزيع جاما ذي الثلاث معـالم وتم استخدام العزوم لحساب أفضل مقدرات خطية غير متحيزة best linear unbiased estimates (BLUEs) لمعلمتي المكان والقياس وباستخدام هذه المقدرات تـم حـساب فترات الثقة لكل من معلمتي المكان والقياس من خلال محاكاة مونت كـارلو، كمـا تمت مناقشة تنبؤات النقطة والفترة للقيم المسجلة المستقبلية.
- قدم Soliman and AL-Aboud (2008) تقدير الإمكان الأكبر وتقدير بيـز لمعلمـة توزيع رايلي، وكذلك تقديرات دالتي الصلاحية ومعدل التعطل لهذا التوزيع باستخدام القيم المسجلة ودوال الخسارة المتماثلة وغير المتماثلة.
- درس Ahmadi and MirMostafaee (2009) مشكلة التنبؤ بقيمـة مـسجلة مـستقبلية اعتمادا على مجموعة سابقة من الإحصاءات المرتبة العادية من التوزيع الأسـي ذي المعلمتين (تنبؤ العينتين)، أيضا تم إيجاد فترات التنبؤ لإحصاءات مرتبة فـي عينـة مستقبلية حجمها *m* من التوزيع الأسي ذي المعلمتين اعتمادا على *n* من القيم المسجلة من نفس التوزيع .
- درس Ahmadi et al. (2009a,b) تقديرات وتنبؤات بييز لعائلـة مـن التوزيعـات الإحصائية وباستخدام دوال خسارة متماثلة وغير متماثلة اعتمادا على قيم مسجلة من الرتبة *k* وتمت مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها بالحالات الخاصة التي سـبق دراستها.
- قام Kundu and Raqab (2009) بتقدير نموذج الإجهاد - القوة لتوزيـع وايبـل ذي الثلاث معالم باستخدام طريقة الإمكان الأكبر المطورة اعتمادا على البيانات المرتبة.
- حصل Longford (2009) على العديد من المقدرات للمتوسـط والوسـيط والمنـوال للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي log-normal distribution ومن ثم درست خواص هذه المقدرات وقورنت بمقدر الإمكان الأكبر والمقدر غير المتحيز بأقل تباين.
- أوجد Kim and Han (2009) مقدرات الإمكان الأكبر ومقدرات بييز لمعلمة القيـاس ولدالة الصلاحية لتوزيع رايلي اعتمادا على العينات ذات المراقبة التتابعية المعممـة، كما تم الحصول على فترات تنبؤ بييز وفترات تنبؤ أعلى كثافـة بعديـة لمـشاهدة مستقبلية، وتمت مقارنة المقدرات باستخدام أسلوب المحاكاة وتم استخدام مثال تطبيقي لتوضيح الأهمية التطبيقية للنتائج.

- تمكن Asgharzadeh (2009) من إيجاد تقريب لمقدر الإمكان الأكبر غير الصريح لمعلمة القياس للتوزيع الأسي المعمم واستخدم أسلوب المحاكاة للتأكد من مدى دقة وكفاءة المقدرات التي تم الحصول عليها وقد أعطى الباحث مثالين لتوضيح طريقة التقدير.
- أوجد Kumar, Mahapatra, and Vellaisamy (2009) تقدير دوال الصلاحية باستخدام عينات مختارة من مجتمعات تتبع التوزيع الأسي بمعلمة قياس معلومة ومعلمة مكان مجهولة، كما أوجد المقدر المنتظم غير المتحيز بأقل تباين uniformly minimum variance unbiased estimator.
- ناقش Raqab (2009) تنبؤ العينتين في حالة القيم المسجلة من توزيعات اختيارية.
- أوجد Wong and Wu (2009) تقديرات الفترة باستخدام طريقة الإمكان الأكبر لنموذج الإجهاد – القوة من التوزيع الأسي المعمم ذي المعلمة الواحدة اعتمادا على قيم مسجلة دنيا.
- أوجد Krishnamoorthy and Lin (2010) تقديرا بفترة لنموذج الإجهاد - القوة لتوزيع وايبل باستخدام البيانات المراقبة من النوع الأول.
- قدم Kim, Jung and Chung (2011) تقديرات الإمكان الأكبر وتقديرات بييز لمعلمتي توزيع وايبل الأسي ولدالة الصلاحية اعتمادا على العينات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني واعتمادا على دوال خسارة متماثلة وغير متماثلة وتم استخدام تقريب لندلي لإنجاز الحسابات العددية وقورنت النتائج باستخدام محاكاة مونت كارلو.

الفصل الثالث

تقدير بييز لتوزيع وايبل الأسي اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة

Bayes Estimation for the Exponentiated Weibull Distribution based on Generalized Order Statistics

(٣-١) مقدمـة Introduction

سيتم في هذا الفصل تقدير معلمتي توزيع وايبل الأسي بالإضافة لـ دالتي الـصلاحية ومعدل التعطل وذلك باستخدام طريقة الإمكان الأكبر وطرق بييز بناءا على دالـة خـسارة مربع الخطأ المتوازنة وهي دالة متماثلة، ودالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة وهي دالـة غير متماثلة، وذلك اعتمادا على نموذج الإحصاءات المرتبة المعممة، مع الأخذ في الاعتبار النوعين الآتيين من التوزيعات القبلية:

١- توزيعات قبلية معلمة.

٢- توزيعات قبلية غير معلمة.

سيتم أيضا عرض ومناقشة أحد الأمثلة التطبيقية باستخدام بعض العينـات الحقيقيـة لتوضيح الناحية التطبيقية لنتائج هذا الفصل، كما ستتم المقارنة العددية للمقدرات التـي تـم الحصول عليها باستخدام أسلوب المحاكاة بطريقة Monte Carlo وذلك بهدف مقارنة النتـائج الخاصة بطريقة الإمكان الأكبر بنتائج طرق بييز وذلك اعتمادا على العينات المراقبة تتابعيا والقيم المسجلة الدنيا كحالات خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة.

(٣-٢) التقدير باستخدام طريقة الإمكان الأكبر

Estimation Using the Maximum Likelihood Method

بفرض أن $X(1,n,\tilde{m},k),...,X(r,n,\tilde{m},k)$ هي أول r إحصاء مرتب معمـم مـن توزيع وايبل الأسي الذي له دالة كثافـة الاحتمـال (2.57) ودالـة التوزيـع التراكميـة (2.58)،

دالة الإمكان لهذه المتغيرات يتم الحصول عليها بالتعويض من العلاقتين (2.57) و(2.58) في العلاقة (2.20) كما يلي:

$$\begin{aligned}\ell(\alpha,\theta|\underline{x}) &= C_{r-1}\alpha^r\theta^r \left(\prod_{i=1}^{r} x_i^{\alpha-1}e^{-x_i^{\alpha}}u^{\theta-1}(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r-1}[1-u^{\theta}(x_i)]^{m_i}\right)[1-u^{\theta}(x_r)]^{\gamma_r-1}, \\ &= C_{r-1}\alpha^r\theta^r\ \eta(x_i;\alpha,\theta).\end{aligned} \tag{3.1}$$

حيث

$$\begin{cases}\eta(\underline{x};\alpha,\theta) = \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)u^{\theta}(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r-1}[1-u^{\theta}(x_i)]^{m_i}\right)[1-u^{\theta}(x_r)]^{\gamma_r-1}, \\ u(x_i)\equiv u(x_i;\alpha) = 1-e^{-x_i^{\alpha}}, \\ v(x_i)\equiv v(x_i;\alpha) = \dfrac{x_i^{\alpha-1}e^{-x_i^{\alpha}}}{u(x_i)}.\end{cases} \tag{3.2}$$

حيث $C_{r-1} = \prod_{i=1}^{r}\gamma_i$ و γ_r سبق تعريفهما بالعلاقتين (2.18) و (2.19) على التوالي.

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان (3.1) نحصل على

$$\begin{aligned}L &= \ln\ell(\alpha,\theta|\underline{x}), \\ &= \ln C_{r-1} + r\ln\alpha + r\ln\theta + \sum_{i=1}^{r-1} m_i \ln[1-u^{\theta}(x_i)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r}\Big((\alpha-1)\ln x_i - x_i^{\alpha} + (\theta-1)\ln u(x_i)\Big) \\ &\quad + (\gamma_r-1)\ln[1-u^{\theta}(x_r)].\end{aligned} \tag{3.3}$$

وبإجراء التفاضل الجزئي للمعادلة (3.3) بالنسبة لكل من α,θ نحصل على مقدرات الإمكان الأكبر للمعلمتين α,θ من المعادلتين الآتيتين:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\alpha} &= \frac{r}{\alpha} + \sum_{i=1}^{r-1}\frac{m_i\theta u^{\theta-1}(x_i)x_i^{\alpha}e^{-x_i^{\alpha}}\ln x_i}{1-u^{\theta}(x_i)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r}\ln x_i\left(1-x_i^{\alpha}+\frac{(\theta-1)x_i^{\alpha}e^{-x_i^{\alpha}}}{u(x_i)}\right) + \frac{(\gamma_r-1)\theta u^{\theta-1}(x_r)x_r^{\alpha}e^{-x_r^{\alpha}}\ln x_r}{1-u^{\theta}(x_r)},\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{r}{\theta} + \sum_{i=1}^{r-1}\frac{m_i u^{\theta}(x_i)\ln u(x_i)}{1-u^{\theta}(x_i)} + \sum_{i=1}^{r}\ln u(x_i) + \frac{(\gamma_r-1)u^{\theta}(x_r)\ln u(x_r)}{1-u^{\theta}(x_r)}, \tag{3.5}$$

مقدرا الإمكان الأكبر $\hat{\alpha}_{ML}$ و $\hat{\theta}_{ML}$ يتم الحصول عليهما بحـل معـادلتي الإمكـان المعطـاة بالمعادلتين (3.4) و(3.5) بعد مساواتهما بالصفر.

ونحصل على مقدري الإمكان الأكبر لدالتي الصلاحية $S(t)$ ومعدل التعطل $h(t)$ من العلاقتين (2.59) و(2.60) بعد التعويض عن كل من α و θ بقيمتي مقدري الإمكان الأكبر $\hat{\alpha}_{ML}$ و $\hat{\theta}_{ML}$ أي أن:

$$\hat{S}_{ML}(t)=1-u^{\hat{\theta}_{ML}}(t;\hat{\alpha}_{ML}), \qquad t>0, \tag{3.6}$$

$$\hat{h}_{ML}(t)=\frac{\hat{\alpha}_{ML}\hat{\theta}_{ML}\,v(t;\hat{\alpha}_{ML})u^{\hat{\theta}_{ML}}(t;\hat{\alpha}_{ML})}{[1-u^{\hat{\theta}_{ML}}(t;\hat{\alpha}_{ML})]}, \quad t>0. \tag{3.7}$$

(٣-٣) مصفوفة معلومات فشر

Fisher Information Matrix

في هذا البند سيتم حساب مصفوفة معلومات فشر لمقدرات الإمكان الأكبر على أساس عينة من إحصاءات مرتبة معممة، مما يمكننا من تكوين فترات الثقة لمعلمتي التوزيع على أساس تقريبات التوزيع الطبيعي المعياري.

التباينات والتغايرات التقريبية لمقدرات الإمكان الأكبر للمعلمتين α,θ تعطى من معكوس مصفوفة معلومات فشر التي على الصورة:

$$I=\left.\begin{bmatrix} E\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha^2}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\,\partial\theta}\right) \\ E\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial\theta\,\partial\alpha}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2}\right)\end{bmatrix}\right|_{\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML}}, \tag{3.8}$$

وحيث أنه من الصعب الحصول على التوقعات أعلاه فسيتم اعتبارمصفوفة معلومات فشر التقريبية بتجاهل مؤثر التوقع كما يلي: (انظر Lehmann and Casella (1998))

$$\begin{bmatrix}\operatorname{var}(\hat{\alpha}_{ML}) & \operatorname{cov}(\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML}) \\ \operatorname{cov}(\hat{\theta}_{ML},\hat{\alpha}_{ML}) & \operatorname{var}(\hat{\theta}_{ML})\end{bmatrix}= I^{-1}=\frac{1}{|I|}\left.\begin{bmatrix}-\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\,\partial\theta} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial\theta\,\partial\alpha} & -\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha^2}\end{bmatrix}\right|_{\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML}}. \tag{3.9}$$

ويمكن الحصول على التفاضلات $\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha^2},\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2},\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\,\partial\theta}$ بإجراء التفاضل الجزئي للعلاقتين (3.4)،(3.5) كما يلي:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}=-\frac{r}{\alpha^2}+\sum_{i=1}^{r-1} m_i \psi_1(x_i,\alpha,\theta)+(\gamma_r-1)\psi_1(x_r,\alpha,\theta)$$
$$-\sum_{i=1}^{r} x_i^{\alpha}\ln^2 x_i+\sum_{i=1}^{r}(\theta-1)x_i^{\alpha}e^{-x_i^{\alpha}}\ln^2 x_i\left(\frac{1-x_i^{\alpha}}{u(x_i)}-\frac{x_i^{\alpha}e^{-x_i^{\alpha}}}{u^2(x_i)}\right), \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}=-\frac{r}{\theta^2}+\sum_{i=1}^{r-1} m_i \psi_2(x_i,\alpha,\theta)+(\gamma_r-1)\psi_2(x_r,\alpha,\theta), \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta\,\partial \alpha}=\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha\,\partial \theta}=\sum_{i=1}^{r-1} m_i \psi_3(x_i,\alpha,\theta)+(\gamma_r-1)\psi_3(x_r,\alpha,\theta)$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^{\alpha}e^{-x_i^{\alpha}}\ln x_i}{u(x_i)}, \tag{3.12}$$

حيث

$$\psi_1(x_i,\alpha,\theta)=\theta x_i^{\alpha}e^{-x_i^{\alpha}}u^{\theta-2}(x_i)\ln^2 x_i$$
$$\left(\frac{(\theta-1)x_i^{\alpha}e^{-x_i^{\alpha}}-u(x_i)(1+x_i^{\alpha})}{1-u^{\theta}(x_i)}+\frac{\theta u^{\theta}(x_i)x_i^{\alpha}e^{-x_i^{\alpha}}}{(1-u^{\theta}(x_i))^2}\right), \tag{3.13}$$

$$\psi_2(x_i,\alpha,\theta)=u^{\theta}(x_i)\ln^2 u(x_i)\left(\frac{1}{1-u^{\theta}(x_i)}+\frac{u^{\theta}(x_i)}{(1-u^{\theta}(x_i))^2}\right), \tag{3.14}$$

$$\psi_3(x_i,\alpha,\theta)=x_i^{\alpha}e^{-x_i^{\alpha}}u^{\theta-1}(x_i)\ln x_i\left(\frac{1+\theta\ln u(x_i)}{1-u^{\theta}(x_i)}+\frac{\theta u^{\theta}(x_i)\ln u(x_i)}{(1-u^{\theta}(x_i))^2}\right). \tag{3.15}$$

بالتالي يكون تباينا مقدري الإمكان الأكبر $\hat{\alpha}_{ML}$ و $\hat{\theta}_{ML}$ وتغايرهما على الصورة :

$$\operatorname{var}(\hat{\alpha}_{ML})=\frac{1}{|I|}\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\Big|_{\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML}}\right), \tag{3.16}$$

$$\operatorname{var}(\hat{\theta}_{ML})=\frac{1}{|I|}\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}\Big|_{\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML}}\right), \tag{3.17}$$

$$\operatorname{cov}(\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML})=\frac{1}{|I|}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta\,\partial \alpha}\Big|_{\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML}}\right), \tag{3.18}$$

حيث

$$|I|=\left[\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}\Big|_{\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML}}\right)\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\Big|_{\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML}}\right)-\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \theta\,\partial \alpha}\Big|_{\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML}}\right)^2\right]. \tag{3.19}$$

وباستخدام خاصية التقارب العامة لمقدرات الإمكان الأكبر فإن توزيـع المعاينـة للمقـدارين $(\hat{\alpha}-\alpha)/\sqrt{\text{var}(\hat{\alpha})},\quad (\hat{\theta}-\theta)/\sqrt{\text{var}(\hat{\theta})}$ يمكن تقريبهما للتوزيع الطبيعي المعياري عنـدما $n \to \infty$، وعليه يكون حدا فترة الثقة التقريبية لكل من α و θ بدرجة ثقـة $\tau 100\%$ علـى الصورة:

$$\hat{\alpha} \pm z_{(1-\tau)/2}\sqrt{\text{var}(\hat{\alpha})} \quad , \qquad \hat{\theta} \pm z_{(1-\tau)/2}\sqrt{\text{var}(\hat{\theta})} \ , \qquad (3.20)$$

حيث $z_{(1-\tau)/2}$ تتبع التوزيع الطبيعي المعياري.

(٣-٤) التقدير باستخدام طرق بييز

Estimation Using Bayes Methods

في هذا البند سوف يتم إيجاد مقدرات بييز المختلفة في حالة عـدم معلوميـة أحـد المعلمتين وفي حالة عدم معلومية المعلمتين اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنـة ودالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة.

(٣-٤-١) التقدير في حالة معلومية المعلمة α

Estimation when α is known

بافتراض معلومية المعلمة α سيتم في هذا البند حساب مقـدرات بييـز للمعلمـة θ ولدالتي الصلاحية ومعدل التعطل اعتمادا على دوال الخسارة المختلفة وذلك لكل من الحالتين الآتيتين للتوزيعات القبلية:

١- توزيع قبلي معام للمعلمة θ.

٢- توزيع قبلي غير معام للمعلمة θ.

(٣-٤-١-١) توزيع قبلي معام للمعلمة θ

Informative prior distribution for θ

فيما يلي سيتم حساب مقدرات بييز للمعلمة θ اعتمادا علـى توزيـع قبلـي معـام، بفرض أن التوزيع القبلي للمعلمة θ هو التوزيع الذي تم اقتراحه بواسطة Nassar and Eissa (2004) حيث تتبع المعلمة θ توزيع جاما بالمعلمتين (ν,δ) على الشكل التالي:

$$\pi_1(\theta) = \frac{\delta^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\theta^{\nu-1}e^{-\delta\theta}; \quad \theta > 0 \, , \quad \nu,\delta > 0, \qquad (3.21)$$

بمتوسط ν/δ وتباين ν/δ^2.

وبتطبيق نظرية بييز فإن التوزيع البعدي للمعلمة θ نحصل عليه باستخدام دالة الإمكان (3.1)، والتوزيع القبلي (3.21) فيأخذ الصورة:

$$\begin{aligned}\pi_1^*(\theta\,|\,\underline{x}) &\propto \ell(\alpha,\theta\,|\,\underline{x})\pi_1(\theta)\\ &= K_1^{-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-\delta\theta}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta),\end{aligned} \tag{3.22}$$

حيث

$$K_1 = \int_0^\infty \theta^{r+\nu-1}e^{-\delta\theta}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\theta. \tag{3.23}$$

ونحصل على مقدرات بييز اعتمادا على دوال الخسارة المختلفة (المتماثلة وغير المتماثلة) باستخدام العلاقات (2.46) و(2.48) مع العلاقة (3.22).

مقدرات بييز اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

مقدر بييز للدالة $\lambda \equiv \lambda(\theta)$ اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة المعطاة بالمعادلة (2.45) يمكن أن يكتب على الشكل التالي:

$$\hat{\lambda}_{BS} = \omega\hat{\lambda}_{ML} + (1-\omega)E(\lambda\,|\,\underline{x}), \tag{3.24}$$

حيث $\hat{\lambda}_{ML}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة λ، وعليه فإننا نحصل على مقدرات بييز لمعلمة الشكل θ ولدالتي الصلاحية ومعدل التعطل لتوزيع وايبل الأسي اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة بوضع $\lambda(\theta)=\theta,\, S(t),\, h(t)$ على التوالي في العلاقة (3.24)، حيث تأخذ الدالة $E(\lambda\,|\,\underline{x})$ الأشكال التالية:

$$\begin{aligned}E(\theta\,|\,\underline{x}) &= \int_0^\infty \theta\,\pi_1^*(\theta|\underline{x})\,d\theta,\\ &= K_1^{-1}\int_0^\infty \theta^{r+\nu}e^{-\delta\theta}\;\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\theta,\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}E(S(t)\,|\,\underline{x}) &= \int_0^\infty S(t)\,\pi_1^*(\theta|\underline{x})\,d\theta,\\ &= K_1^{-1}\int_0^\infty \theta^{r+\nu-1}e^{-\delta\theta}[1-u^\theta(t)]\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\theta,\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}E(h(t)\,|\,\underline{x}) &= \int_0^\infty h(t)\,\pi_1^*(\theta|\underline{x})\,d\theta,\\ &= K_1^{-1}\int_0^\infty \theta^{r+\nu}e^{-\delta\theta}\left(\frac{\alpha v(t)u^\theta(t)}{1-u^\theta(t)}\right)\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\theta.\end{aligned} \tag{3.27}$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

كذلك مقدر بييز للدالة $\lambda \equiv \lambda(\theta)$ اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة المعطاة بالمعادلة (2.47) يمكن أن يكتب على الشكل التالي:

$$\hat{\lambda}_{BL} = -\frac{1}{a}\ln[\omega e^{-a\hat{\lambda}_{ML}} + (1-\omega)E(e^{-a\lambda} \mid \underline{x})]. \tag{3.28}$$

وعليه فإن مقدرات بييز لمعلمة الشكل θ ولدالتي الصلاحية ومعدل التعطل لتوزيـع وايبـل الأسي يمكن الحصول عليها من (3.28) بوضع $\lambda(\theta)=\theta,\ S(t),h(t)$ على التـوالي، حيـث تأخذ الدالة $E(e^{-a\lambda} \mid \underline{x})$ الأشكال التالية:

$$\begin{aligned} E(e^{-a\theta} \mid \underline{x}) &= \int_0^\infty e^{-a\theta}\,\pi_1^*(\theta \mid \underline{x})\,d\theta, \\ &= K_1^{-1}\int_0^\infty \theta^{r+\nu-1} e^{-(a+\delta)\theta}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\theta, \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} E(e^{-aS(t)} \mid \underline{x}) &= \int_0^\infty e^{-aS(t)}\pi_1^*(\theta \mid \underline{x})\,d\theta, \\ &= K_1^{-1}\int_0^\infty \theta^{r+\nu-1} e^{-\delta\theta} e^{-a[1-u^{\theta}(t)]}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\theta, \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} E(e^{-ah(t)} \mid \underline{x}) &= \int_0^\infty e^{-ah(t)}\pi_1^*(\theta \mid \underline{x})\,d\theta, \\ &= K_1^{-1}\int_0^\infty \theta^{r+\nu-1} e^{-\delta\theta} e^{-a\left(\frac{\alpha\theta v(t)u^{\theta}(t)}{1-u^{\theta}(t)}\right)}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\theta. \end{aligned} \tag{3.31}$$

(٣-٤-١-٢) توزيع قبلي غير معام للمعلمة θ

Non-informative prior distribution for θ

بفرض أن معلمة الشكل α معلومة وأن المعلومات القبلية عن المعلمـة θ قليلـة أو شبه معدومة، ففي هذه الحالة يكون من المناسب استخدام توزيع قبلي غير معام منتظم لهـذه المعلمة على الصورة:

$$\pi_2(\theta) \propto \frac{1}{\theta}, \qquad \theta > 0. \tag{3.32}$$

ونحصل على التوزيع البعدي للمعلمة θ من العلاقتين (3.1) و(3.32) كما يلي:

$$\begin{aligned} \pi_2^*(\theta \mid \underline{x}) &\propto \pi_2(\theta)\ell(\alpha,\theta \mid \underline{x}), \\ &= J_1^{-1}\theta^{r-1}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta), \end{aligned} \tag{3.33}$$

حيث

$$J_1 = \int_0^\infty \theta^{r-1}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\theta. \tag{3.34}$$

واضح من ذلك أنه يمكن الحصول على التوزيع البعدي (3.33) كحالة خاصة مـن التوزيـع البعدي المعطى بالمعادلة (3.22) وذلك بوضع $\nu=\delta=0$. وبالتالي يمكن الحـصول علـى

مقدرات بييز للدوال $\theta, S(t), h(t)$ باستخدام توزيع قبلي غير معلم كحالات خاصة مما سبق بوضع $\nu = \delta = 0$ كما يلي:

مقدرات بييز اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

مقدرات بييز للدوال $\theta, S(t), h(t)$ اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة تأخذ الصور التالية:

$$E(\theta \mid \underline{x}) = J_1^{-1} \int_0^{\infty} \theta^{r}\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\theta, \tag{3.35}$$

$$E(S(t) \mid \underline{x}) = J_1^{-1} \int_0^{\infty} \theta^{r-1} [1-u^{\theta}(t)] \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\theta, \tag{3.36}$$

$$E(h(t) \mid \underline{x}) = J_1^{-1} \int_0^{\infty} \theta^{r} \left(\frac{\alpha v(t) u^{\theta}(t)}{1-u^{\theta}(t)} \right) \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\theta. \tag{3.37}$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

مقدرات بييز للدوال $\theta, S(t), h(t)$ اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة تأخذ الصور التالية:

$$E(e^{-a\theta} \mid \underline{x}) = J_1^{-1} \int_0^{\infty} \theta^{r-1} e^{-a\theta}\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\theta, \tag{3.38}$$

$$E(e^{-aS(t)} \mid \underline{x}) = J_1^{-1} \int_0^{\infty} \theta^{r-1} e^{-a[1-u^{\theta}(t)]}\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\theta, \tag{3.39}$$

$$E(e^{-ah(t)} \mid \underline{x}) = J_1^{-1} \int_0^{\infty} \theta^{r-1} e^{-a\left(\frac{\alpha\theta v(t) u^{\theta}(t)}{1-u^{\theta}(t)}\right)}\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\theta. \tag{3.40}$$

(٣-٤-٢) التقدير في حالة عدم معلومية المعلمتين α, θ

Estimation when α and θ are unknown

في هذا البند سيتم إيجاد مقدرات بييز لمعلمتي توزيع وايبل الأسي α, θ إضافة لدالتي الصلاحية ومعدل التعطل اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة ودالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة وذلك لكل من الحالتين الآتيتين للتوزيعات القبلية:

١- توزيعات قبلية معلمة.

٢- توزيعات قبلية غير معلمة.

(٣-٤-٢-١) توزيعات قبلية معلمة للمعلمتين α,θ

Informative prior distributions for α,θ

بفرض أن معلمتي التوزيع α,θ مجهولتان، وأن التوزيع القبلي لهما هو التوزيع الذي تم اقتراحه في Nassar and Eissa (2004) وفيه كان التوزيع المشروط للمعلمة θ (بشرط معلومية المعلمة α) هو توزيع جاما بالمعلمتين $(\nu,\frac{1}{\alpha})$ في حين تم تعديل التوزيع القبلي للمعلمة α ليكون توزيع جاما بالمعلمتين $(d,\frac{1}{b})$ بدلا من التوزيع الأسي، أي أن:

$$\pi_3(\theta\,|\,\alpha)=\frac{\alpha^{-\nu}}{\Gamma(\nu)}\theta^{\nu-1}e^{-\theta/\alpha},\ \ \theta>0, \tag{3.41}$$

$$\pi_3(\alpha)=\frac{b^{-d}}{\Gamma(d)}\alpha^{d-1}e^{-\alpha/b},\ \alpha>0, \tag{3.42}$$

ويكون التوزيع القبلي المشترك للمعلمتين α,θ على الصورة:

$$\begin{aligned}\pi_3(\alpha,\theta)&=\pi_3(\theta\,|\,\alpha)\,\pi_3(\alpha),\\ &\propto \alpha^{d-\nu-1}\theta^{\nu-1}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\ ,\qquad \alpha,\theta>0.\end{aligned} \tag{3.43}$$

ونحصل على التوزيع البعدي المشترك للمعلمتين α,θ من العلاقتين (3.1) و (3.43) على النحو الآتي:

$$\begin{aligned}\pi_3^*(\alpha,\theta\,|\,\underline{x})&\propto \ell(\alpha,\theta\,|\,\underline{x})\pi_3(\alpha,\theta),\\ \pi_3^*(\alpha,\theta\,|\,\underline{x})&=K_2^{-1}\alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta),\end{aligned} \tag{3.44}$$

حيث

$$K_2=\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta. \tag{3.45}$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يعطى مقدر بييز للدالة $\lambda\equiv\lambda(\alpha,\theta)$ بالمعادلة (3.24)، وعليه فإن مقدرات بييز لمعلمتي التوزيع بالإضافة لدالتي الصلاحية ومعدل التعطل نحصل عليها بوضع $\lambda(\alpha,\theta)=\alpha,\ \theta,\ S(t),h(t)$ على التوالي، حيث:

$$\begin{aligned}E(\alpha\,|\,\underline{x})&=\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\,\pi_3^*(\alpha,\theta\,|\,\underline{x})\,d\alpha\,d\theta,\\ &=K_2^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu-1}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta,\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$E(\theta|\underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \theta\, \pi_3^*(\alpha,\theta|\underline{x})\, d\alpha\, d\theta,$$
$$= K_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1} \theta^{r+\nu}\, e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\alpha\, d\theta, \qquad (3.47)$$

$$E(S(t)|\underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^\infty S(t)\, \pi_3^*(\alpha,\theta|\underline{x})\, d\alpha\, d\theta,$$
$$= K_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1} \theta^{r+\nu-1}\, e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} [1-u^\theta(t)]\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\alpha\, d\theta, \qquad (3.48)$$

$$E(h(t)|\underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(t)\, \pi_3^*(\alpha,\theta|\underline{x})\, d\alpha\, d\theta,$$
$$= K_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu} \theta^{r+\nu}\, e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \left(\frac{v(t)u^\theta(t)}{1-u^\theta(t)}\right) \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\alpha\, d\theta. \qquad (3.49)$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

يعطى مقدر بييز للدالة $\lambda \equiv \lambda(\alpha,\theta)$ اعتمادا على دالـة الخـسارة الخطيـة الأسـية المتوازنة بالمعادلة (3.28)، فنحصل على مقدرات بييز لمعلمتي التوزيع ولدالتي الـصلاحية ومعدل التعطل بوضع $\lambda(\alpha,\theta) = \alpha,\ \theta,\ S(t),\ h(t)$ على التوالي:

$$E(e^{-a\alpha}|\underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a\alpha}\, \pi_3^*(\alpha,\theta|\underline{x})\, d\alpha\, d\theta,$$
$$= K_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1} \theta^{r+\nu-1}\, e^{-((ab+1)\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\alpha\, d\theta, \qquad (3.50)$$

$$E(e^{-a\theta}|\underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a\theta}\, \pi_3^*(\alpha,\theta|\underline{x})\, d\alpha\, d\theta,$$
$$= K_1^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1} \theta^{r+\nu-1}\, e^{-(\alpha^2+(a\alpha+1)b\theta)/b\alpha}\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\alpha\, d\theta, \qquad (3.51)$$

$$E(e^{-aS(t)}|\underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-aS(t)}\, \pi_3^*(\alpha,\theta|\underline{x})\, d\alpha\, d\theta,$$
$$= K_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1} \theta^{r+\nu-1}\, e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \qquad (3.52)$$
$$e^{-a[1-u^\theta(t)]}\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\alpha\, d\theta,$$

$$E(e^{-ah(t)}|\underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ah(t)}\, \pi_3^*(\alpha,\theta|\underline{x})\, d\alpha\, d\theta,$$
$$= K_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1} \theta^{r+\nu-1}\, e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \qquad (3.53)$$
$$e^{-a\left(\frac{\alpha\theta v(t)u^\theta(t)}{1-u^\theta(t)}\right)}\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, d\alpha\, d\theta.$$

(٣-٤-٢-٢) توزيعات قبلية غير معلمة للمعلمتين α,θ

Non-informative prior distributions for α,θ

بافتراض أن معلمتي الشكل مجهولتان وأن المعلومات القبلية عنهما قليلة أو شبه معدومة، ففي هذه الحالة يكون من المناسب استخدام توزيع قبلي غير معلم لمعلمتي الشكل يعطى بالعلاقتين الآتيتين: (سبق استخدامه في (Singh, Gupta and Upadhyay (2005a,b)):

$$\pi_4(\alpha)=\frac{1}{c}, \qquad 0<\alpha<c, \tag{3.54}$$

$$\pi_4(\theta)\propto\frac{1}{\theta}, \qquad \theta>0. \tag{3.55}$$

ويمكن الحصول على التوزيع البعدي المشترك للمعلمتين α,θ من العلاقات (3.1) و (3.54) و(3.55) باستخدام نظرية بييز كما يلي:

$$\begin{aligned}\pi_4^*(\alpha,\theta\,|\,\underline{x}) &\propto \pi(\alpha)\pi(\theta)\ell(\alpha,\theta\,|\,\underline{x})\\ &= J_2^{-1}\alpha^r\theta^{r-1}\ \eta(\underline{x};\alpha,\theta),\end{aligned} \tag{3.56}$$

حيث

$$J_2=\int_0^\infty\int_0^c \alpha^r\theta^{r-1}\ \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta. \tag{3.57}$$

والآن وبعد الحصول على التوزيع البعدي وبنفس الخطوات المتبعة في البنود السابقة يمكننا الحصول على صيغ مقدرات بييز باستخدام دوال الخسارة المختلفة (المتماثلة وغير المتماثلة) باستخدام العلاقات (2.46), (2.48) مع التوزيع البعدي (3.56).

مقدرات بييز اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

يعطى مقدر بييز للدالة $\lambda\equiv\lambda(\alpha,\theta)$ اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة بالمعادلة (3.24)، ونحصل على مقدرات بييز لمعلمتي التوزيع ولدالتي الصلاحية ومعدل التعطل بوضع $\lambda(\alpha,\theta)=\theta, S(t), h(t)$ على التوالي، حيث:

$$\begin{aligned}E(\alpha\,|\,\underline{x}) &= \int_0^\infty\int_0^c \alpha\,\pi_4^*(\alpha,\theta\,|\,\underline{x})\,d\alpha\,d\theta,\\ &= J_2^{-1}\int_0^\infty\int_0^c \alpha^{r+1}\theta^{r-1}\ \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta,\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}E(\theta\,|\,\underline{x}) &= \int_0^\infty\int_0^c \theta\,\pi_4^*(\alpha,\theta\,|\,\underline{x})\,d\alpha\,d\theta,\\ &= J_2^{-1}\int_0^\infty\int_0^c \alpha^{r}\theta^{r}\ \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta,\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}E(S(t)\,|\,\underline{x}) &= \int_0^\infty\int_0^c S(t)\,\pi_4^*(\alpha,\theta\,|\,\underline{x})\,d\alpha\,d\theta,\\ &= J_2^{-1}\int_0^\infty\int_0^c \alpha^{r}\theta^{r-1}[1-u^\theta(t)]\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta,\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$E(h(t)|\underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^c h(t)\,\pi_4^*(\alpha,\theta|\underline{x})\,d\alpha\,d\theta,$$
$$= J_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^c \alpha^{r+1}\theta^r \left(\frac{v(t)u^\theta(t)}{1-u^\theta(t)}\right) \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta. \quad (3.61)$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

يعطى مقدر بييز للدالة $\lambda \equiv \lambda(\alpha,\theta)$ اعتمادا على دالـة الخـسارة الخطيـة الأسـية المتوازنة بالمعادلة (3.28)، وبوضع $\lambda(\alpha,\theta) = \alpha,\, \theta,\, S(t),\, h(t)$ فإننا نحصل على مقدرات بييز لمعلمتي التوزيع ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل على التوالي، حيث:

$$E(e^{-a\alpha}|\underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^c e^{-a\alpha}\,\pi_4^*(\alpha,\theta|\underline{x})\,d\alpha\,d\theta,$$
$$= J_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^c \alpha^r \theta^{r-1} e^{-a\alpha}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta, \quad (3.62)$$

$$E(e^{-a\theta}|\underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^c e^{-a\theta}\,\pi_4^*(\alpha,\theta|\underline{x})\,d\alpha\,d\theta,$$
$$= J_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^c \alpha^r \theta^{r-1} e^{-a\theta}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta, \quad (3.63)$$

$$E(e^{-aS(t)}|\underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^c e^{-aS(t)}\,\pi_4^*(\alpha,\theta|\underline{x})\,d\alpha\,d\theta,$$
$$= J_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^c \alpha^r \theta^{r-1} e^{-a[1-u^\theta(t)]} \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta, \quad (3.64)$$

$$E(e^{-ah(t)}|\underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^c e^{-ah(t)}\,\pi_4^*(\alpha,\theta|\underline{x})\,d\alpha\,d\theta,$$
$$= J_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^c \alpha^r \theta^{r-1} e^{-a\left(\frac{\alpha\theta v(t)u^\theta(t)}{1-u^\theta(t)}\right)}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta. \quad (3.65)$$

(٣-٤-٣) حساب تقديرات بييز باستخدام طرق سلسلة ماركوف

Bayesian computations using Markov chain Monte Carlo method

في الحالات التي يصعب فيها حساب التكاملات الناتجة في تقديرات بييز تحليليا فإنه يتم اللجوء (كما يفعل الكثير من الباحثين) لطرق التكامل العددي بما فيها من صعوبات، أيضا هناك طرق بييز التقريبية مثل تقريب لندلي Lindley(1980) وتقريب تيرني- كادين Tierney and Kadane (1986) التي يمكن استخدام أي منها وبالتالي مواجهـة الحـسابات الرياضـية المعقدة بالإضافة إلى البحث عن تحقق شروط معينة يتطلبها استخدام هذه التقريبات. في هذا العمل سوف نستخدم طرق سلسلة ماركوف لحساب مقدرات بييز وهي تعتبر الحـل البـديل والأمثل للأساليب التي سبق ذكرها. وفيما يلي سيتم شرح كيفية تطبيق هذه الطرق:

أولا: في البداية نقوم بحـساب التوزيعـات البعديـة المـشروطة للمعلمتـين α,θ ولـتكن $\pi^*(\alpha|\theta,\underline{x})$ و $\pi^*(\theta|\alpha,\underline{x})$، وهنا نميز بين حالتين:

الحالة الأولى: إذا كانت توزيعات إحصائية معروفة فإنه سيتم توليد قيم عشوائية للمعالم منها مباشرة وذلك باستخدام خوارزمية معاينة جبس التي يمكن وصفها رياضيا كما يلي:

١- نفترض قيمة إبتدائية لمتجه المعالم $(\alpha^{(0)},\theta^{0)})$.

٢- نضع $j=1$.

٣- يتم توليد قيمة للمعلمة α ولتكن $\alpha^{(j)}$ من التوزيع البعدي المشروط $\pi^*(\alpha|\theta,\underline{x})$.

٤- يتم توليد قيمة للمعلمة θ ولتكن $\theta^{(j)}$ من التوزيع البعدي المشروط $\pi^*(\theta|\alpha,\underline{x})$.

٥- نضع $j=j+1$.

٦- نكرر الخطوات من ٣ إلى ٥ حيث $j=1,2,...,N$.

الحالة الثانية: إذا اتضح أن هذه التوزيعات المشروطة لا تأخذ شكل التوزيعات المعروفة وبالتالي لا يمكن توليد قيم عشوائية منها بطرق مباشرة، فإننا سنستخدم خوارزمية الميتروبوليس- هاستنق بإتباع الخطوات التالية:

١- نبدأ بفرض قيم ابتدائية للمعلمتين ولتكن $(\alpha^{(0)},\theta^{0)})$.

٢- نضع $j=1$.

٣- نولد القيمة $\alpha^{(j)}$ من $\pi^*(\alpha|\theta,\underline{x})$ باستخدام توزيع مقترح وليكن $q_1(\alpha^{(j)}|\alpha^{(j-1)},\underline{x})$.

٤- نحسب الاحتمال التالي:

$$\varphi_1(\alpha^{(j-1)},\alpha^{(j)})=\min[1,\frac{\pi^*(\alpha^{(j)}|\theta^{(j-1)},\underline{x})q_1(\alpha^{(j-1)}|\alpha^{(j)},\underline{x})}{\pi^*(\alpha^{(j-1)}|\theta^{(j-1)},\underline{x})q_1(\alpha^{(j)}|\alpha^{(j-1)},\underline{x})}],$$

٥- نولد قيمة U_1 من التوزيع المنتظم القياسي على الفترة $(0,1)$ فإذا كان $U_1\le\varphi_1(\alpha^{(j-1)},\alpha^{(j)})$ نقبل القيمة المولدة من التوزيع المقترح وإلا نرفضها ونضع $\alpha^{(j)}=\alpha^{(j-1)}$.

٦- نولد القيمة $\theta^{(j)}$ من $\pi^*(\theta|\alpha,\underline{x})$ باستخدام توزيع مقترح وليكن $q_2(\theta^{(j)}|\theta^{(j-1)},\underline{x})$.

٧- نحسب الاحتمال التالي:

$$\varphi_2(\theta^{(j-1)},\theta^{(j)})=\min[1,\frac{\pi^*(\theta^{(j)}|\alpha^{(j)},\underline{x})q_2(\theta^{(j-1)}|\theta^{(j)},\underline{x})}{\pi^*(\theta^{(j-1)}|\alpha^{(j)},\underline{x})q_2(\theta^{(j)}|\theta^{(j-1)},\underline{x})}],$$

٨- نولد قيمة U_2 من التوزيع المنتظم القياسي على الفترة $(0,1)$ فإذا كان $U_2 \le \varphi_2(\theta^{(j-1)},\theta^{(j)})$ نقبل القيمة المولدة من التوزيع المقترح وإلا نرفضها ونضع $\theta^{(j)}=\theta^{(j-1)}$.

٩- نضع $j=j+1$.

١٠- نكرر الخطوات من ٣ إلى ٩ N مرة.

ثانيا: يحسب المتوسط التقريبي للدوال $\lambda \equiv \lambda(\alpha,\theta)$ ، $e^{-a\lambda} \equiv e^{-a\lambda(\alpha,\theta)}$ على التوالي من العلاقتين التاليتين:

$$E(\lambda \mid \underline{x}) = \sum_{j=M+1}^{N} \frac{\lambda(\alpha^{(j)},\theta^{(j)})}{N-M}, \tag{3.66}$$

$$E(e^{-a\lambda} \mid \underline{x}) = \sum_{j=M+1}^{N} \frac{e^{-a\lambda(\alpha^{(j)},\theta^{(j)})}}{N-M}. \tag{3.67}$$

حيث N هو طول سلسلة ماركوف و M هو عدد القيم المحذوفة من بداية السلسلة.

ونحصل على تقديرات بييز المختلفة لمعلمتي التوزيع ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة ودالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة باستخدام العلاقات (3.66)،(3.67) في صيغ مقدرات بييز التي سبق الحصول عليها في العلاقتين (3.24)،(3.28).

(٣-٥) حالات خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة

Special Cases from the Generalized Order Statistics

(٣-٥-١) التقدير اعتمادا على العينة المراقبة تتابعيا من النوع الثاني

Estimation based on progressive type-II censored sample

كما ذكرنا في الفصل الثاني فإنه يمكن الحصول على العينة المراقبة تتابعيا كحالة خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة وذلك بوضع $m_i = R_i$ لجميع قيم $i=1,2,\dots,r-1$ و $\gamma_r = R_r + 1$ ، وبالتالي يمكن تخصيص المقدرات المختلفة التي سبق الحصول عليها لمعلمتي التوزيع ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل لتوزيع وايبل الأسي اعتمادا على العينة المراقبة تتابعيا كما يلي:

(٣-٥-١-١) مقدرات الإمكان الأكبر

نحصل على مقدرات الإمكان الأكبر اعتمادا على العينة المراقبة تتابعيا من النوع الثاني ذات الحجم r من مقدرات الإمكان الأكبر التي أوجدناها اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة بالتعويض في العلاقتين (3.4),(3.5) بالقيم $m_i = R_i$ لجميع قيم $i = 1,2,...,r-1$ و$\gamma_r = R_r + 1$ ، في هذه الحالة فإن مقدري الإمكان الأكبر $\hat{\alpha}_{ML}$ و $\hat{\theta}_{ML}$ يتم الحصول عليهما من حل معادلتي الإمكان التاليتين آنيا:

$$\frac{r}{\hat{\alpha}_{MLp}} - \sum_{i=1}^{r} \frac{R_i \hat{\theta}_{MLp} u^{\hat{\theta}_{MLp}-1}(x_i) x_i^{\hat{\alpha}_{MLp}} e^{-x_i^{\hat{\alpha}_{MLp}}} \ln x_i}{1-u^{\hat{\theta}_{MLp}}(x_i)} + \sum_{i=1}^{r} \ln x_i \left(1 - x_i^{\hat{\alpha}_{MLp}} + \frac{(\hat{\theta}_{MLp}-1) x_i^{\hat{\alpha}_{MLp}} e^{-x_i^{\hat{\alpha}_{MLp}}}}{u(x_i)} \right) = 0, \tag{3.68}$$

$$\frac{r}{\hat{\theta}_{MLp}} - \sum_{i=1}^{r} \frac{R_i u^{\hat{\theta}_{MLp}}(x_i) \ln u(x_i)}{1-u^{\hat{\theta}_{MLp}}(x_i)} + \sum_{i=1}^{r} \ln u(x_i) = 0, \tag{3.69}$$

وكل من (3.68) و (3.69) غير خطية لا يمكن إيجاد حل تحليلي لها، لذا سيتم استخدام أحدى الطرق العددية كطريقة نيوتن رافسون أو غيرها للحصول على قيم $\hat{\alpha}_{MLp}$ و$\hat{\theta}_{MLp}$.

وبالتعويض عن α,θ بمقدري الإمكان الأكبر $\hat{\alpha}_{MLp},\hat{\theta}_{MLp}$ في العلاقتين (2.59)،(2.60) نحصل على مقدري الإمكان الأكبر لدالة الصلاحية $S(t)$ ودالة معدل التعطل $h(t)$ لتوزيع وايبل الأسي باستخدام عينة مراقبة تتابعيا من النوع الثاني ويرمز لهذين المقدرين بالرمز $\hat{S}_{MLp}(t)$ و $\hat{h}_{MLp}(t)$.

(٣-٥-١-٢) مصفوفة معلومات فشر

نحصل على التباينات والتغايرات التقريبية لمقدري الإمكان الأكبر للمعلمتين α و θ اعتمادا على العينة المراقبة تتابعيا من النوع الثاني ذات الحجم r من التباينات والتغايرات التقريبية التي أوجدناها لمقدري الإمكان الأكبر للمعلمتين α و θ في العلاقات (3.16)، (3.17)،(3.18)،(3.19) بعد التعويض في العلاقات (3.10)،(3.11)،(3.12) بالقيم التالية:

$m_i = R_i$ لجميع قيم $i = 1,2,...,r-1$ و $\gamma_r = R_r + 1$ فيكون

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} = -\frac{r}{\alpha^2} - \sum_{i=1}^{r} R_i \psi_1(x_i, \alpha, \theta) - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\alpha} \ln^2 x_i + \sum_{i=1}^{r} (\theta - 1) x_i^{\alpha} e^{-x_i^{\alpha}} \ln^2 x_i \left(\frac{1 - x_i^{\alpha}}{u(x_i)} - \frac{x_i^{\alpha} e^{-x_i^{\alpha}}}{u^2(x_i)} \right), \tag{3.70}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = -\frac{r}{\theta^2} - \sum_{i=1}^{r} R_i \psi_2(x_i, \alpha, \theta), \tag{3.71}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \theta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \alpha} = -\sum_{i=1}^{r} R_i \psi_3(x_i, \alpha, \theta) + \sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^{\alpha} e^{-x_i^{\alpha}} \ln x_i}{u(x_i)}. \tag{3.72}$$

حيث $\psi_1(x_i,\alpha,\theta)$ ، $\psi_2(x_i,\alpha,\theta)$ ، $\psi_3(x_i,\alpha,\theta)$ سبق تعريفها بالعلاقات (3.13)، (3.14)، (3.15) على التوالي.

و تعطى فترة الثقة التقريبية من جهتين للمعلمتين α و θ بدرجة ثقة $\tau 100\%$ من العلاقة (3.20).

(٣-٥-١-٣) مقدرات بييز

يمكن الحصول على مقدرات بييز اعتمادا على العينة المراقبة تتابعيا من النوع الثاني ذات الحجم r باعتبار توزيعات قبلية معلمة أو غير معلمة من تقديرات بييز التي تم إيجادها في حالة معلومية أحد المعلمتين وفي حالة عدم معلومية المعلمتين اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة باستخدام نتائج البندين (٣-٤-١) و (٣-٤-٢) كما يلي:

(٣-٥-١-٣-١) التقدير في حالة معلومية المعلمة α

(٣-٥-١-٣-١-١) توزيع قبلي معلم للمعلمة θ

اعتمادا على العينة المراقبة تتابعيا من النوع الثاني ذات الحجم r فإن $m_i = R_i$ لجميع قيم $i = 1,2,...,r-1$ كذلك $\gamma_r = R_r + 1$ ، في هذه الحالة تأخذ الدالة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ المعطاة بالمعادلة (3.2) الشكل التالي:

$$\eta(\underline{x};\alpha,\theta) = \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) u^{\theta}(x_i) \right) \left(\prod_{i=1}^{r} [1 - u^{\theta}(x_i)]^{R_i} \right), = \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) \sum_r e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta}, \tag{3.73}$$

حيث

$$\left.\begin{aligned}&\sum_r=\sum_{\ell_1=0}^{R_1}\cdots\sum_{\ell_r=0}^{R_r}\binom{R_1}{\ell_1}\cdots\binom{R_r}{\ell_r}(-1)^{\sum_{i=1}^{r}\ell_i}\ ,\\&\xi(\underline{x};\alpha,r)=-\sum_{i=1}^{r}(\ell_i+1)\ln u(x_i).\end{aligned}\right\}. \tag{3.74}$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

باستخدام العلاقة (3.24) والتعويض في العلاقات (3.27)،(3.26)،(3.25) عن قيمة الدالـة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ المعرفة بالعلاقة (3.73) وإجراء التكاملات نحصل علـى مقـدرات بييـز لـ ـ $\theta,S(t),h(t)$ اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة ولتكن $\hat{\theta}_{BSp},\hat{S}_{BSp}(t),\hat{h}_{BSp}(t)$، حيث:

$$\begin{aligned}E(\theta\,|\,\underline{x})&=K_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r\int_0^{\infty}\theta^{r+\nu}e^{-[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}\,d\theta\ ,\\&=K_1^{-1}\Gamma(r+\nu+1)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-(r+\nu+1)},\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}E(S(t)\,|\,\underline{x})&=K_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r\int_0^{\infty}\theta^{r+\nu-1}e^{-[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}[1-u^{\theta}(t)]d\theta,\\&=K_1^{-1}\Gamma(r+\nu)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\\&\qquad\sum_r\left\{[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-(r+\nu)}-[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(t)]^{-(r+\nu)}\right\},\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}E(h(t)\,|\,\underline{x})&=K_1^{-1}\alpha v(t)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_r\int_0^{\infty}\theta^{r+\nu}e^{-[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)-(\ell+1)\ln u(t)]\theta}\,d\theta,\\&=K_1^{-1}\alpha v(t)\Gamma(r+\nu+1)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\\&\qquad\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_r[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)-(\ell+1)\ln u(t)]^{-(r+\nu+1)}.\end{aligned} \tag{3.77}$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

كذلك باستخدام العلاقة (3.28) والتعويض في العلاقات (3.29)،(3.30)،(3.31) عن قيمة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ وإجراء التكاملات نحصل على مقدرات بييز لـ $\theta,S(t),h(t)$ اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة ولتكن $\hat{\theta}_{BSp},\hat{S}_{BSp}(t),\hat{h}_{BSp}(t)$، حيث:

$$E(e^{-a\theta}\mid \underline{x})=K_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r\int_0^\infty \theta^{r+\nu-1}e^{-[a+\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}\,d\theta,$$
$$=K_1^{-1}\Gamma(r+\nu)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r[a+\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-(r+\nu)}, \qquad (3.78)$$

$$E(e^{-aS(t)}\mid \underline{x})=K_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r\int_0^\infty \theta^{r+\nu-1}e^{-[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}e^{-a[1-u^{\theta}(t)]}\,d\theta,$$
$$=K_1^{-1}e^{-a}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)$$
$$\sum_r\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^{\ell}}{\ell!}\int_0^\infty \theta^{r+\nu-1}e^{-[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ell\ln u(t)]\theta}\,d\theta, \qquad (3.79)$$
$$=K_1^{-1}\Gamma(r+\nu)e^{-a}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)$$
$$\sum_r\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^{\ell}}{\ell!}[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ell\ln u(t)]^{-(r+\nu)},$$

$$E(e^{-ah(t)}\mid \underline{x})=K_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)$$
$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_r\int_0^\infty \theta^{r+\nu-1}e^{-\theta[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)]}e^{-a\left(\frac{\alpha\theta v(t)u^{\theta}(t)}{1-u^{\theta}(t)}\right)}\,d\theta, \qquad (3.80)$$

حيث

$$K_1=\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r\int_0^\infty \theta^{r+\nu-1}e^{-[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}\,d\theta,$$
$$=\Gamma(r+\nu)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r[\delta+\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-(r+\nu)}. \qquad (3.81)$$

(٣-٥-١-٣-١-٢) توزيع قبلي غير معام للمعلمة θ

مقدرات بييز اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

باستخدام العلاقة (3.24) والتعويض في العلاقات (3.35)،(3.36)،(3.37) عن قيمة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ المعطاة بالمعادلة (3.73) وإجراء التكاملات نحصل على مقدرات بييـز لـ ـ $\theta, S(t), h(t)$ اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة ولتكن $\hat{\theta}_{BSp}, \hat{S}_{BSp}(t), \hat{h}_{BSp}(t)$، حيث:

$$E(\theta\mid \underline{x})=J_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r\int_0^\infty \theta^{r}e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta}\,d\theta,$$
$$=J_1^{-1}\Gamma(r+1)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r[\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-(r+1)}, \qquad (3.82)$$

$$E(S(t)|\underline{x}) = J_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)$$
$$\sum_r \int_0^\infty \theta^{r-1} e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta}[1-u^\theta(t)]d\theta,$$
$$= J_1^{-1}\Gamma(r)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)$$
$$\sum_r \left\{[\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-r} - [\xi(\underline{x};\alpha,r) - \ln u(t)]^{-r}\right\}, \quad (3.83)$$

$$E(h(t)|\underline{x}) = J_1^{-1}\alpha v(t)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)$$
$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_r \int_0^\infty \theta^r e^{-[\xi(\underline{x};\alpha,r)-(\ell+1)\ln u(t)]\theta} d\theta,$$
$$= J_1^{-1}\alpha v(t)\Gamma(r+1)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)$$
$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_r [\xi(\underline{x};\alpha,r) - (\ell+1)\ln u(t)]^{-(r+1)}. \quad (3.84)$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

كذلك باستخدام العلاقة (3.28) والتعويض في العلاقات (3.38)، (3.39)، (3.40)، عن قيمة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ المعرفة بالعلاقة (3.73) وإجراء التكاملات نحصل علـى مقـدرات بييـز لـ ـ $\theta, S(t), h(t)$ اعتمـادا علـى دالـة الخـسارة الخطيـة الأسـية المتوازنـة ولـتكن $\hat{\theta}_{BSp}, \hat{S}_{BSp}(t), \hat{h}_{BSp}(t)$، حيث:

$$E(e^{-a\theta}|\underline{x}) = J_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum_r \int_0^\infty \theta^{r-1} e^{-[a+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta} d\theta,$$
$$= J_1^{-1}\Gamma(r)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum_r [a+\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-r}, \quad (3.85)$$

$$E(e^{-aS(t)}|\underline{x}) = J_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum_r \int_0^\infty \theta^{r-1} e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta} e^{-a[1-u^\theta(t)]} d\theta,$$
$$= J_1^{-1}e^{-a}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_r \frac{a^\ell}{\ell!}\int_0^\infty \theta^{r-1} e^{-[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ell\ln u(t)]\theta} d\theta, \quad (3.86)$$
$$= J_1^{-1}\Gamma(r)e^{-a}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_r \frac{a^\ell}{\ell!}[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ell\ln u(t)]^{-r},$$

$$E(e^{-ah(t)}|\underline{x}) = J_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_r \int_0^\infty \theta^{r-1} e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta} e^{-a\left(\frac{\alpha\theta v(t)u^\theta(t)}{1-u^\theta(t)}\right)} d\theta, \quad (3.87)$$

حيث

$$J_1=\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r\int_0^\infty\theta^{r-1}\,e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta}d\theta,$$
$$=\Gamma(r)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r[\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-r}. \qquad (3.88)$$

(٣-٥-١-٣-٢) التقدير في حالة عدم معلومية المعلمتين α,θ

(٣-٥-١-٣-٢-١) توزيعات قبلية معلمة للمعلمتين α,θ

مقدرات بييز اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

باستخدام العلاقة (3.24) والتعويض في العلاقات (3.46)،(3.47)،(3.48)،(3.49) عن قيمة الدالة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ من (3.73) وإجراء التكاملات نحصل على مقدرات بييز لـ $\alpha,\theta,S(t),h(t)$ اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة ولتكن $\hat{\alpha}_{BSp},\hat{\theta}_{BSp},\hat{S}_{BSp}(t),\hat{h}_{BSp}(t)$ ، حيث:

$$E(\alpha|\underline{x})=K_2^{-1}\sum_r$$
$$\int_0^\infty\int_0^\infty\alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)e^{-[\frac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}\,d\theta\,d\alpha,$$
$$=K_2^{-1}\Gamma(r+\nu)\sum_r$$
$$\int_0^\infty\alpha^{r+d-\nu}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)[\tfrac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-(r+\nu)}\,d\alpha. \qquad (3.89)$$

$$E(\theta|\underline{x})=K_2^{-1}\sum_r$$
$$\int_0^\infty\int_0^\infty\alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)e^{-[\frac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}\,d\theta\,d\alpha,$$
$$=K_2^{-1}\Gamma(r+\nu+1)\sum_r$$
$$\int_0^\infty\alpha^{r+d-\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)[\tfrac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-(r+\nu+1)}\,d\alpha, \qquad (3.90)$$

$$E(S(t)|\underline{x})=K_2^{-1}\sum_r$$
$$\int_0^\infty\int_0^\infty\alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)e^{-[\frac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}[1-u^{\theta}(t)]\,d\theta\,d\alpha,$$
$$=K_2^{-1}\Gamma(r+\nu)\sum_r\int_0^\infty\alpha^{r+d-\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)$$
$$\left\{[\tfrac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-(r+\nu)}-[\tfrac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(t)]^{-(r+\nu)}\right\}d\alpha, \qquad (3.91)$$

$$E(h(t)|\underline{x}) = K_2^{-1}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_r \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu}e^{-\alpha/b}$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)\nu(t)e^{-[\frac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)-(\ell+1)\ln u(t)]\theta}\,d\theta\,d\alpha, \tag{3.92}$$
$$= K_2^{-1}\Gamma(r+\nu+1)\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_r \int_0^{\infty}\alpha^{r+d-\nu}e^{-\alpha/b}$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)\nu(t)[\tfrac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)-(\ell+1)\ln u(t)]^{-(r+\nu+1)}\,d\alpha,$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

باستخدام العلاقة (3.28) والتعويض في العلاقات (3.50)،(3.51)،(3.52)،(3.53) عن قيمة الدالة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ من (3.73) وإجراء التكاملات نحصل على مقدرات بييـز لـ ـ $\alpha,\theta,S(t),h(t)$ اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسـية المتوازنـة ولـتكن $\hat{\alpha}_{BSp},\hat{\theta}_{BSp},\hat{S}_{BSp}(t),\hat{h}_{BSp}(t)$، حيث:

$$E(e^{-a\alpha}|\underline{x}) = K_2^{-1}\sum_r$$
$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-(a+1/b)\alpha}\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)e^{-[\frac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}\,d\theta\,d\alpha, \tag{3.93}$$
$$= K_2^{-1}\Gamma(r+\nu)\sum_r$$
$$\int_0^{\infty}\alpha^{r+d-\nu-1}e^{-(a+1/b)\alpha}\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)[\tfrac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-(r+\nu)}\,d\alpha,$$

$$E(e^{-a\theta}|\underline{x}) = K_2^{-1}\sum_r$$
$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)e^{-[a+\frac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}\,d\theta\,d\alpha, \tag{3.94}$$
$$= K_2^{-1}\Gamma(r+\nu)\sum_r$$
$$\int_0^{\infty}\alpha^{r+d-\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)[a+\tfrac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-(r+\nu)}\,d\alpha,$$

$$E(e^{-aS(t)}|\underline{x}) = K_2^{-1}\sum_r$$
$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-\alpha/b}e^{-a[1-u^{\theta}(t)]}$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)e^{-[\frac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}\,d\theta\,d\alpha,$$
$$= K_2^{-1}\sum_r\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^{\ell}}{\ell!}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-\alpha/b}e^{-a}$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)e^{-[\frac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ell\ln u(t)]\theta}\,d\theta\,d\alpha,$$

$$= K_2^{-1}\Gamma(r+\nu)\sum_r \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^{\ell}}{\ell!} e^{-a} \int_0^{\infty} \alpha^{r+d-\nu-1} e^{-\alpha/b}$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[\tfrac{1}{\alpha} + \xi(\underline{x};\alpha,r) - \ell \ln u(t)]^{-(r+\nu)}\, d\alpha\,, \tag{3.95}$$

$$E(e^{-ah(t)} \mid \underline{x}) = K_2^{-1}\sum_r \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1} e^{-\alpha/b}$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) e^{-a(\frac{\alpha\theta v(t)u^{\theta}(t)}{1-u^{\theta}(t)})}\, e^{-[\frac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}\, d\theta\, d\alpha, \tag{3.96}$$

حيث

$$K_2 = \sum_r \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1} e^{-\alpha/b} \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) e^{-[\frac{1}{\alpha}+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}\, d\theta\, d\alpha,$$
$$= \Gamma(r+\nu)\sum_r \int_0^{\infty} \alpha^{r+d-\nu-1} e^{-\alpha/b} \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[\tfrac{1}{\alpha} + \xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-(r+\nu)}\, d\alpha. \tag{3.97}$$

(٣-٥-١-٣-٢-٢) توزيعات قبلية غير معلمة للمعلمتين α,θ

مقدرات بييز اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

باستخدام العلاقة (3.24) والتعويض في العلاقات (3.58)،(3.59)،(3.60)،(3.61) عن قيمة الدالة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ من (3.73) وإجراء التكاملات نحصل على مقدرات بييز لـ $\alpha,\theta,S(t),h(t)$ اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة ولتكن $\hat{\alpha}_{BSp},\hat{\theta}_{BSp},\hat{S}_{BSp}(t),\hat{h}_{BSp}(t)$ ، حيث:

$$E(\alpha \mid \underline{x}) = J_2^{-1}\sum_r \int_0^{c}\int_0^{\infty} \alpha^{r+1}\theta^{r-1} \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta}\, d\theta\, d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\Gamma(r)\sum_r \int_0^{c} \alpha^{r+1} \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-r}\, d\alpha, \tag{3.98}$$

$$E(\theta \mid \underline{x}) = J_2^{-1}\sum_r \int_0^{c}\int_0^{\infty} \alpha^{r}\theta^{r} \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta}\, d\theta\, d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\Gamma(r+1)\sum_r \int_0^{c} \alpha^{r} \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-(r+1)}\, d\alpha, \tag{3.99}$$

$$E(S(t)|\underline{x}) = J_2^{-1}\sum_r \int_0^c\int_0^\infty \alpha^r\theta^{r-1}\left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta}[1-u^\theta(t)]\,d\theta\,d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\Gamma(r)\sum_r \int_0^c \alpha^r\left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)\left\{[\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-r} - [\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(t)]^{-r}\right\}d\alpha, \quad (3.100)$$

$$E(h(t)|\underline{x}) = J_2^{-1}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_r \int_0^c\int_0^\infty \alpha^{r+1}\theta^r\left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)v(t)\, e^{-[\xi(\underline{x};\alpha,r)-(\ell+1)\ln u(t)]\theta}\,d\theta\,d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\Gamma(r+1)\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_r \int_0^c \alpha^{r+1}\left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)v(t)\,[\xi(\underline{x};\alpha,r)-(\ell+1)\ln u(t)]^{-(r+1)}\,d\alpha, \quad (3.101)$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

باستخدام العلاقة (3.28) والتعويض في العلاقات (3.62)،(3.63)،(3.64)،(3.65) عن قيمة الدالة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ من (3.73) وإجراء التكاملات نحصل على مقدرات بييز لـ $\alpha,\theta,S(t),h(t)$ اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة ولتكن $\hat{\alpha}_{BSp},\hat{\theta}_{BSp},\hat{S}_{BSp}(t),\hat{h}_{BSp}(t)$، حيث:

$$E(e^{-a\alpha}|\underline{x}) = J_2^{-1}\sum_r \int_0^c\int_0^\infty \alpha^r\theta^{r-1}e^{-a\alpha}\left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta}\,d\theta\,d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\Gamma(r)\sum_r \int_0^c \alpha^r e^{-a\alpha}\left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)[\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-r}\,d\alpha, \quad (3.102)$$

$$E(e^{-a\theta}|\underline{x}) = J_2^{-1}\sum_r \int_0^c\int_0^\infty \alpha^r\theta^{r-1}\left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)e^{-[a+\xi(\underline{x};\alpha,r)]\theta}\,d\theta\,d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\Gamma(r)\sum_r \int_0^c \alpha^r\left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)[a+\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-r}\,d\alpha, \quad (3.103)$$

$$E(e^{-aS(t)}|\underline{x}) = J_2^{-1}\sum_r \int_0^c\int_0^\infty \alpha^r\theta^{r-1}\left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta}e^{-a[1-u^\theta(t)]}\,d\theta\,d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\sum_r \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^\ell}{\ell!}e^{-a} \int_0^c\int_0^\infty \alpha^r\theta^{r-1}\left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)e^{-[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ell\ln u(t)]\theta}\,d\theta\,d\alpha,$$

$$= J_2^{-1}\Gamma(r)\sum_r \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^{\ell}}{\ell!}e^{-a}$$
$$\int_0^c \alpha^r \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ell \ln u(t)]^{-r} \quad d\alpha, \tag{3.104}$$

$$E(e^{-ah(t)}\,|\,\underline{x}) = J_2^{-1}\sum_r \int_0^{\infty}\int_0^{c}\alpha^r\theta^{r-1}e^{-a(\frac{\alpha\theta v(t)u^{\theta}(t)}{1-u^{\theta}(t)})}$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta}\,d\alpha\,d\theta, \tag{3.105}$$

حيث

$$J_2 = \sum_r \int_0^{\infty}\int_0^{c}\alpha^r\theta^{r-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)e^{-\xi(\underline{x};\alpha,r)\theta}\,d\alpha\,d\theta,$$
$$= \Gamma(r)\sum_r \int_0^{c}\alpha^r\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-r}\,d\alpha. \tag{3.106}$$

يتضح من العلاقات السابقة أن مقدرات بييز اعتمادا على العينات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني في حالة عدم معلومية المعلمتين تعتمد على تكاملات معقدة يصعب حسابها بالطرق التحليلية لذلك سوف نلجأ لاستخدام طرق سلسلة ماركوف (MCMC) لحساب التقديرات في هذه الحالة.

(٣-٥-٢) التقدير اعتمادا على القيم المسجلة الدنيا

Estimation based on lower record values

يمكن الحصول على القيم المسجلة الدنيا كحالة خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة بعد تحويلها إلى الإحصاءات المرتبة المعممة المقابلة كما سبق توضيحه في الفصل الثاني وذلك باستبدال الدالة $F(x)$ بالدالة $1-F(x)$ (وهذا يكافئ استبدال الدالة $1-u^{\theta}(x)$ بالدالة $u^{\theta}(x)$) ثم وضع $\gamma_r = k = 1$ و $m_i = -1$ لجميع قيم $i = 1,2,...,r-1$ ، في هذه الحالة تأخذ دالة الإمكان المعطاة بالمعادلة (3.1) الشكل التالي:

$$\ell(\alpha,\theta\,|\,\underline{x}) = C_{r-1}\alpha^r\theta^r\left(\prod_{i=1}^{r}\frac{x_i^{\alpha-1}e^{-x_i^{\alpha}}}{u(x_i)}\right)u^{\theta}(x_r),$$
$$= C_{r-1}\alpha^r\theta^r\,\eta^*(\underline{x};\alpha,\theta), \tag{3.107}$$

حيث تعطى $\eta^*(x_i;\alpha,\theta)$ من العلاقة:

$$\eta^*(\underline{x};\alpha,\theta) = \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)u^{\theta}(x_r). \tag{3.108}$$

وكلا من $u(.),v(.)$ تعطى بالعلاقة (3.2).

(٣-٥-٢-١) مقدرات الإمكان الأكبر

نحصل على مقدرات الإمكان الإكبر اعتمادا على القيم المسجلة الدنيا ذات الحجم r وذلك بإيجاد المشتقات الجزئية الأولى بالنسبة للمعلمتين α,θ للوغاريتم دالة الإمكان ومساواة الناتج بالصفر، يعطى لوغاريتم دالة الإمكان (3.107) بالعلاقة:

$$L = \ln \ell(\alpha,\theta \mid \underline{x}) \\ = \ln C_{r-1} + r\ln\alpha + r\ln\theta + \sum_{i=1}^{r}\Big((\alpha-1)\ln x_i - x_i^{\alpha} - \ln u(x_i)\Big) + \theta\ln u(x_r). \tag{3.109}$$

بالتالي تكون معادلتي الإمكان على الصورة:

$$\frac{r}{\hat{\alpha}_{MLr}} + \frac{\hat{\theta}_{MLr}\, x_r^{\hat{\alpha}_{MLr}} e^{-x_r^{\hat{\alpha}_{MLr}}} \ln x_r}{u(x_r)} + \sum_{i=1}^{r}\ln x_i\left(1 - x_i^{\hat{\alpha}_{MLr}} - \frac{x_i^{\hat{\alpha}_{MLr}} e^{-x_i^{\hat{\alpha}_{MLr}}}}{u(x_i)}\right) = 0. \tag{3.110}$$

$$\frac{r}{\hat{\theta}_{MLr}} + \ln u(x_r) = 0, \tag{3.111}$$

من المعادلة (3.111) نحصل على مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ في صورة صريحة في الصورة :

$$\hat{\theta}_{MLr} = -\frac{r}{\ln u(x_r)}, \tag{3.112}$$

وبالتعويض عن $\hat{\theta}_{MLr}$ في المعادلة (3.110) نحصل على:

$$\frac{r}{\hat{\alpha}_{MLr}} - \frac{r\, x_r^{\hat{\alpha}_{MLr}} e^{-x_r^{\hat{\alpha}_{MLr}}} \ln x_r}{u(x_r)\ln u(x_r)} + \sum_{i=1}^{r}\ln x_i\left(1 - x_i^{\hat{\alpha}_{MLr}} - \frac{x_i^{\hat{\alpha}_{MLr}} e^{-x_i^{\hat{\alpha}_{MLr}}}}{u(x_i)}\right) = 0. \tag{3.113}$$

وبحل هذه المعادلة عدديا بالنسبة إلى α نحصل على مقدر الإمكان الأكبر لها وليكن $\hat{\alpha}_{MLr}$.

ويعطى مقدرا الإمكان الأكبر $\hat{S}_{MLr}(t)$ و $\hat{h}_{MLr}(t)$ لكل من دالة الصلاحية $S(t)$ ودالة معدل التعطل $h(t)$ لتوزيع وايبل الأسي باستخدام عينة من القيم المسجلة الدنيا من المعادلتين (2.59) و(2.60) على الترتيب بعد التعويض عن كل من α و θ بقيمتي مقدري الإمكان الأكبر لهما $\hat{\alpha}_{MLr}$ و $\hat{\theta}_{MLr}$.

(٣-٥-٢-٢) مصفوفة معلومات فشر

نحصل على التباينات والتغايرات التقريبية لمقدرات الإمكان الأكبر اعتمادا على أول r من القيم المسجلة الدنيا من العلاقات (3.16)،(3.17)،(3.18)،(3.19) حيث:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} = -\frac{r}{\alpha^2} + \theta x_r^{\alpha} e^{-x_r^{\alpha}} \ln^2 x_r \left(\frac{1-x_r^{\alpha}}{u(x_r)} - \frac{x_r^{\alpha} e^{-x_r^{\alpha}}}{u^2(x_r)} \right) - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\alpha} \ln^2 x_i - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\alpha} e^{-x_i^{\alpha}} \ln^2 x_i \left(\frac{1-x_i^{\alpha}}{u(x_i)} - \frac{x_i^{\alpha} e^{-x_i^{\alpha}}}{u^2(x_i)} \right), \tag{3.114}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = -\frac{r}{\theta^2}, \tag{3.115}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \alpha} = \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \theta} = \frac{x_r^{\alpha} e^{-x_r^{\alpha}} \ln x_r}{u(x_r)}, \tag{3.116}$$

وتعطى فترة الثقة التقريبية من جهتين للمعلمتين α و θ بدرجة ثقة $\tau 100\%$ من العلاقة (3.20).

(٣-٥-٢-٣) مقدرات بييز

يمكن الحصول على مقدرات بييز اعتمادا على القيم المسجلة الدنيا ذات الحجم r باعتبار توزيعات قبلية معلمة أو غير معلمة من تقديرات بييز التي أوجدناها في حالة معلومية أحد المعلمتين وفي حالة عدم معلومية المعلمتين اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة بالتعويض في نتائج البندين (٣-٤-١) و (٣-٤-٢) بالقيم $\gamma_r = k = 1$ و $m_i = -1$ لجميع قيم $i = 1,2,...,r-1$ مع الأخذ في الاعتبار قيمة $\eta^*(\underline{x};\alpha,\theta)$ المعطاة بالمعادلة (3.108) كما يلي:

(٣-٥-٢-٣-١) التقدير عندما تكون α معلومة

(٣-٥-٢-٣-١-١) توزيع قبلي معام للمعلمة θ

مقدرات بييز اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

باستخدام العلاقة (3.24) والتعويض في العلاقات (3.25), (3.26), (3.27) عن قيمة الدالة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta) \equiv \eta^*(\underline{x};\alpha,\theta)$ من (3.108) وإجراء التكاملات نحصل على مقدرات بييز لـ $\theta, S(t), h(t)$ اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة ولتكن $\hat{\theta}_{BSr}, \hat{S}_{BSr}(t), \hat{h}_{BSr}(t)$، حيث:

$$E(\theta|\underline{x}) = K_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\int_0^{\infty}\theta^{r+v} e^{-\delta\theta} u^{\theta}(x_r)\, d\theta ,$$
$$= K_1^{-1}\,\Gamma(r+v+1)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[\delta - \ln u(x_r)]^{-(r+v+1)}, \qquad (3.117)$$

$$E(S(t)|\underline{x}) = K_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\int_0^{\infty}\theta^{r+v-1} e^{-\delta\theta} u^{\theta}(x_r)[1-u^{\theta}(t)]\, d\theta,$$
$$= K_1^{-1}\Gamma(r+v)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) \qquad (3.118)$$
$$\left\{[\delta - \ln u(x_r)]^{-(r+v)} - [\delta - \ln u(x_r) - \ln u(t)]^{-(r+v)}\right\},$$

$$E(h(t)|\underline{x}) = K_1^{-1}\alpha\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)v(t)$$
$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\theta^{r+v} e^{-[\delta-\ln u(x_r)-(\ell+1)\ln u(t)]\theta}\, d\theta,$$
$$= K_1^{-1}\alpha\,\Gamma(r+v+1)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)v(t) \qquad (3.119)$$
$$\sum_{\ell=0}^{\infty}[\delta - \ln u(x_r) - (\ell+1)\ln u(t)]^{-(r+v+1)} .$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيـضا باسـتخدام العلاقـة (3.28) والتعـويض فـي العلاقـات (3.29)،(3.30)،(3.31) عـن قيمـة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta) \equiv \eta^{*}(\underline{x};\alpha,\theta)$ من (3.108) وإجراء التكاملات نحصل على مقـدرات بييـز لـ ـ $\theta, S(t), h(t)$ اعتمـادا علـى دالـة الخـسارة الخطيـة الأسـية المتوازنـة ولـتكن $\hat{\theta}_{BSr}, \hat{S}_{BSr}(t), \hat{h}_{BSr}(t)$، حيث:

$$E(e^{-a\theta}|\underline{x}) = K_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\int_0^{\infty}\theta^{r+v-1} e^{-(a+\delta)\theta} u^{\theta}(x_r)\, d\theta,$$
$$= K_1^{-1}\,\Gamma(r+v)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[a+\delta - \ln u(x_r)]^{-(r+v)}, \qquad (3.120)$$

$$E(e^{-aS(t)}|\underline{x}) = K_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\int_0^{\infty}\theta^{r+v-1} e^{-\delta\theta} e^{-a[1-u^{\theta}(t)]}\, u^{\theta}(x_r)\, d\theta,$$
$$= K_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)e^{-a}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^{\ell}}{\ell!}\int_0^{\infty}\theta^{r+v-1} e^{-\theta[\delta-\ln u(x_r)-\ell\ln u(t)]}\, d\theta, \qquad (3.121)$$
$$= K_1^{-1}\Gamma(r+v)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)e^{-a}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^{\ell}}{\ell!}[\delta - \ln u(x_r) - \ell\ln u(t)]^{-(r+v)},$$

$$E(e^{-ah(t)}\,|\,\underline{x}) = K_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\int_0^{\infty}\theta^{r+\nu-1}e^{-\delta\theta}u^{\theta}(x_r)e^{-a\left(\frac{\alpha\theta v(t)u^{\theta}(t)}{1-u^{\theta}(t)}\right)}\,d\theta, \qquad (3.122)$$

حيث

$$\begin{aligned} K_1 &= \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\int_0^{\infty}\theta^{r+\nu-1}e^{-\delta\theta}u^{\theta}(x_r)\,d\theta, \\ &= \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\Gamma(r+\nu)[\delta-\ln u(x_r)]^{-(r+\nu)}. \end{aligned} \qquad (3.123)$$

(٣-٥-٢-٣-١-٢) توزيع قبلي غير معام للمعلمة θ

مقدرات بييز اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

باستخدام العلاقة (3.24) والتعويض في العلاقات(3.35)،(3.36)،(3.37) عن قيمة الدالة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\equiv\eta^{*}(\underline{x};\alpha,\theta)$ من (3.108) وإجراء التكاملات نحصل على مقدرات بييز لـ $\theta, S(t), h(t)$ اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة ولتكن $\hat{\theta}_{BSr}, \hat{S}_{BSr}(t), \hat{h}_{BSr}(t)$ ، حيث:

$$\begin{aligned} E(\theta\,|\,\underline{x}) &= J_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\int_0^{\infty}\theta^{r}u^{\theta}(x_r)\,d\theta, \\ &= J_1^{-1}\Gamma(r+1)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[-\ln u(x_r)]^{-(r+1)}, \end{aligned} \qquad (3.124)$$

$$\begin{aligned} E(S(t)\,|\,\underline{x}) &= J_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\int_0^{\infty}\theta^{r-1}u^{\theta}(x_r)[1-u^{\theta}(t)]\,d\theta, \\ &= J_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\Gamma(r)\left\{[-\ln u(x_r)]^{-r}-[-\ln u(x_r)-\ln u(t)]^{-r}\right\}, \end{aligned} \qquad (3.125)$$

$$\begin{aligned} E(h(t)\,|\,\underline{x}) &= J_1^{-1}\alpha\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)v(t) \\ &\qquad \int_0^{\infty}\theta^{r}e^{-\theta[-\ln u(x_r)-(\ell+1)\ln u(t)]}\,d\theta, \\ &= J_1^{-1}\alpha\,\Gamma(r+1)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)v(t) \\ &\qquad \sum_{\ell=0}^{\infty}[-\ln u(x_r)-(\ell+1)\ln u(t)]^{-(r+1)}. \end{aligned} \qquad (3.126)$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

كذلك باستخدام العلاقة (3.28) والتعويض في العلاقات (3.38)،(3.39)، (3.40) عن قيمة الدالة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\equiv\eta^{*}(\underline{x};\alpha,\theta)$ من (3.108) وإجراء التكاملات نحصل على مقدرات بييز لـ

$\theta,S(t),h(t)$ اعتمــادا علــى دالــة الخــسارة الخطيــة الأســية المتوازنــة ولــتكن $\hat{\theta}_{BSr},\hat{S}_{BSr}(t),\hat{h}_{BSr}(t)$ ، حيث:

$$\begin{aligned} E(e^{-a\theta}\mid \underline{x}) &= J_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\int_0^{\infty}\theta^{r-1}e^{-a\theta}u^{\theta}(x_r)\,d\theta, \\ &= J_1^{-1}\Gamma(r)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)[a-\ln u(x_r)]^{-r}, \end{aligned} \tag{3.127}$$

$$\begin{aligned} E(e^{-aS(t)}\mid \underline{x}) &= J_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\int_0^{\infty}\theta^{r-1}u^{\theta}(x_r)e^{-a[1-u^{\theta}(t)]}d\theta, \\ &= J_1^{-1}e^{-a}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^{\ell}}{\ell!}\int_0^{\infty}\theta^{r-1}e^{-\theta[-\ln u(x_r)-\ell\ln u(t)]}\,d\theta, \\ &= J_1^{-1}e^{-a}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\Gamma(r)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^{\ell}}{\ell!}[-\ln u(x_r)-\ell\ln u(t)]^{-r}, \end{aligned} \tag{3.128}$$

$$E(e^{-ah(t)}\mid \underline{x}) = J_1^{-1}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\int_0^{\infty}\theta^{r-1}u^{\theta}(x_r)e^{-a\left(\frac{\alpha\theta v(t)u^{\theta}(t)}{1-u^{\theta}(t)}\right)}\,d\theta, \tag{3.129}$$

حيث

$$\begin{aligned} J_1 &= \left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\int_0^{\infty}\theta^{r-1}\,u^{\theta}(x_r)\,d\theta, \\ &= \left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\Gamma(r)[-\ln u(x_r)]^{-r}. \end{aligned} \tag{3.130}$$

(٣-٥-٢-٣-٢) التقدير في حالة عدم معلومية المعلمتين α,θ

(٣-٥-٢-٣-٢-١) توزيعات قبلية معلمة للمعلمتين α,θ

مقدرات بييز اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

باستخدام العلاقة (3.24) والتعويض في العلاقات (3.46)،(3.47)،(3.48)،(2.49) عن قيمة الدالة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\equiv\eta^{*}(\underline{x};\alpha,\theta)$ من (3.108) وإجراء التكاملات نحصل على مقـدرات بييـز لـ $\alpha,\theta,S(t),h(t)$ اعتمــادا علــى دالــة خــسارة مربــع الخطــأ المتوازنــة ولــتكن $\hat{\alpha}_{BSr},\hat{\theta}_{BSr},\hat{S}_{BSr}(t),\hat{h}_{BSr}(t)$ ، حيث:

$$\begin{aligned} E(\alpha\mid \underline{x}) &= K_2^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)e^{-[\frac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]\theta}d\theta\,d\alpha, \\ &= K_2^{-1}\Gamma(r+\nu)\int_0^{\infty}\alpha^{r+d-\nu}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)[\tfrac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]^{-(r+\nu)}\,d\alpha, \end{aligned} \tag{3.131}$$

$$E(\theta\,|\,\underline{x}) = K_2^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)e^{-[\frac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]\theta}d\theta\,d\alpha,$$

$$= K_2^{-1}\Gamma(r+\nu+1)\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right) \qquad (3.132)$$

$$[\tfrac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]^{-(r+\nu+1)}d\alpha,$$

$$E(S(t)\,|\,\underline{x}) = K_2^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-\alpha/b}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)e^{-[\frac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]\theta}[1-u^{\theta}(t)]\,d\theta\,d\alpha,$$

$$= K_2^{-1}\Gamma(r+\nu)\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right) \qquad (3.133)$$

$$\left\{[\tfrac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]^{-(r+\nu)}-[\tfrac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)-\ln u(t)]^{-(r+\nu)}\right\}d\alpha,$$

$$E(h(t)\,|\,\underline{x}) = K_2^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu}e^{-\alpha/b}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)\nu(t)\sum_{\ell=0}^{\infty}e^{-[\frac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)-(\ell+1)\ln u(t)]\theta}\,d\theta\,d\alpha,$$

$$= K_2^{-1}\Gamma(r+\nu+1)\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu}e^{-\alpha/b} \qquad (3.134)$$

$$\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)\nu(t)\sum_{\ell=0}^{\infty}[\tfrac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)-(\ell+1)\ln u(t)]^{-(r+\nu+1)}d\alpha.$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

كذلك باستخدام العلاقة (3.28) والتعويض في العلاقات (3.50)،(3.51)،(3.52)،(3.53) عن قيمة الدالة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\equiv\eta^*(\underline{x};\alpha,\theta)$ من (3.108) وإجراء التكاملات نحصل على مقدرات بييز لـ $\alpha,\theta,S(t),h(t)$ اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة ولتكن $\hat{\alpha}_{BSr},\hat{\theta}_{BSr},\hat{S}_{BSr}(t),\hat{h}_{BSr}(t)$، حيث:

$$E(e^{-a\alpha}\,|\,\underline{x}) = K_2^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-\alpha(a+1/b)}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)e^{-[\frac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]\theta}d\theta\,d\alpha,$$

$$= K_2^{-1}\Gamma(r+\nu)\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu}e^{-\alpha(a+1/b)} \qquad (3.135)$$

$$\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)[\tfrac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]^{-(r+\nu)}d\alpha,$$

$$E(e^{-a\theta}\mid \underline{x}) = K_2^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)e^{-[a+\frac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]\theta}d\theta\,d\alpha,$$
$$= K_2^{-1}\Gamma(r+\nu)\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)[a+\tfrac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]^{-(r+\nu)}d\alpha, \tag{3.136}$$

$$E(e^{-aS(t)}\mid \underline{x}) = K_2^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)e^{-[\frac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]\theta}e^{-a[1-u^{\theta}(t)]}d\theta\,d\alpha,$$
$$= K_2^{-1}e^{-a}\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^{\ell}}{\ell!}e^{-[\frac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)-\ell\ln u(t)]\theta}d\theta\,d\alpha, \tag{3.137}$$
$$= K_2^{-1}e^{-a}\Gamma(r+\nu)\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^{\ell}}{\ell!}[\tfrac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)-\ell\ln u(t)]^{-(r+\nu)}d\alpha,$$

$$E(e^{-ah(t)}\mid \underline{x}) = K_2^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)u^{\theta}(x_r)e^{-a[\frac{\alpha\theta v(t)u^{\theta}(t)}{1-u^{\theta}(t)}]}d\theta\,d\alpha. \tag{3.138}$$

حيث

$$K_2^{-1} = \int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu-1}\theta^{r+\nu-1}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)e^{-[\frac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]\theta}d\theta\,d\alpha,$$
$$= \Gamma(r+\nu)\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu}e^{-\alpha/b}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)[\tfrac{1}{\alpha}-\ln u(x_r)]^{-(r+\nu)}d\alpha, \tag{3.139}$$

(٣-٥-٢-٣-٢-٢) توزيعات قبلية غير معلمة للمعلمتين α,θ

مقدرات بييز اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

باستخدام العلاقة (3.24) والتعويض في العلاقات (3.58)،(3.59)،(3.60)،(3.61) عن قيمة الدالة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\equiv\eta^{*}(\underline{x};\alpha,\theta)$ من (3.108) وإجراء التكاملات نحصل على مقدرات بييز لـ $\alpha,\theta,S(t),h(t)$ اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة ولتكن $\hat{\alpha}_{BSr},\hat{\theta}_{BSr},\hat{S}_{BSr}(t),\hat{h}_{BSr}(t)$، حيث:

$$E(\alpha|\underline{x}) = J_2^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{c} \alpha^{r+1}\theta^{r-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)u^{\theta}(x_r)\,d\theta\,d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\Gamma(r)\int_0^{c} \alpha^{r+1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[-\ln u(x_r)]^{-r}\,d\alpha, \tag{3.140}$$

$$E(\theta|\underline{x}) = J_2^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{c} \alpha^{r}\theta^{r}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)u^{\theta}(x_r)\,d\theta\,d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\Gamma(r+1)\int_0^{c} \alpha^{r}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[-\ln u(x_r)]^{-(r+1)}\,d\alpha, \tag{3.141}$$

$$E(S(t)|\underline{x}) = J_2^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{c} \alpha^{r}\theta^{r-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)u^{\theta}(x_r)[1-u^{\theta}(t)]\,d\theta\,d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\Gamma(r)\int_0^{c} \alpha^{r}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) \tag{3.142}$$
$$\left\{[-\ln u(x_r)]^{-r} - [-\ln u(x_r) - \ln u(t)]^{-r}\right\}d\alpha,$$

$$E(h(t)|\underline{x}) = J_2^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{c} \alpha^{r+1}\theta^{r}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)$$
$$v(t)\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-[-\ln u(x_r)-(\ell+1)\ln u(t)]\theta}\,d\theta\,d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\Gamma(r+1)\int_0^{c} \alpha^{r+1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) \tag{3.143}$$
$$v(t)\sum_{\ell=0}^{\infty}[-\ln u(x_r) - (\ell+1)\ln u(t)]^{-(r+1)}d\alpha.$$

مقدرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا باستخدام العلاقة (3.28) والتعويض في العلاقات (3.62)،(3.63)،(3.64)،(2.65) عن قيمة الدالة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta) \equiv \eta^{*}(\underline{x};\alpha,\theta)$ من (3.108) وإجراء التكاملات نحصل على مقدرات بييـز لـ $\alpha,\theta,S(t),h(t)$ اعتمادا علـى دالـة الخـسارة الخطيـة الأسـية المتوازنـة ولـتكن $\hat{\alpha}_{BSr},\hat{\theta}_{BSr},\hat{S}_{BSr}(t),\hat{h}_{BSr}(t)$ ، حيث:

$$E(e^{-a\alpha}|\underline{x}) = J_2^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{c} \alpha^{r}\theta^{r-1}e^{-a\alpha}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)u^{\theta}(x_r)\,d\theta\,d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\Gamma(r)\int_0^{c} \alpha^{r}e^{-a\alpha}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[-\ln u(x_r)]^{-r}\,d\alpha, \tag{3.144}$$

$$E(e^{-a\theta} \mid \underline{x}) = J_2^{-1}\int_0^\infty \int_0^c \alpha^r \theta^{r-1} e^{-a\theta}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) u^\theta(x_r)\, d\theta\, d\alpha,$$
$$= J_2^{-1}\Gamma(r)\int_0^c \alpha^r \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[a - \ln u(x_r)]^{-r}\, d\alpha, \quad (3.145)$$

$$E(e^{-aS(t)} \mid \underline{x}) = J_2^{-1}\int_0^\infty \int_0^c \alpha^r \theta^{r-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) e^{\theta \ln u(x_r)} e^{-a[1-u^\theta(t)]}\, d\theta\, d\alpha,$$
$$= J_2^{-1} e^{-a}\int_0^\infty \int_0^c \alpha^r \theta^{r-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^\ell}{\ell!} e^{-[-\ln u(x_r) - \ell \ln u(t)]\theta}\, d\theta\, d\alpha, \quad (3.146)$$
$$= J_2^{-1} e^{-a}\Gamma(r)\int_0^c \alpha^r \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{a^\ell}{\ell!}[-\ln u(x_r) - \ell \ln u(t)]^{-r}\, d\alpha,$$

$$E(e^{-ah(t)} \mid \underline{x}) = J_2^{-1}\int_0^\infty \int_0^c \alpha^r \theta^{r-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) u^\theta(x_r) e^{-a\left[\frac{\alpha\theta v(t) u^\theta(t)}{1-u^\theta(t)}\right]}\, d\theta\, d\alpha, \quad (3.147)$$

حيث

$$J_2 = \int_0^\infty \int_0^c \alpha^r \theta^{r-1}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) u^\theta(x_r)\, d\theta\, d\alpha,$$
$$= \Gamma(r)\int_0^c \alpha^r \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)[-\ln u(x_r)]^{-r}\, d\alpha. \quad (3.148)$$

يتضح من العلاقات السابقة أن مقدرات بييز اعتمادا على القيم المسجلة الدنيا في حالة عدم معلومية المعلمتين تعتمد على تكاملات معقدة يصعب حسابها بالطرق التحليلية لذلك سوف نلجأ لاستخدام طرق سلسلة ماركوف (MCMC) لحساب التقديرات في هذه الحالة.

(٣-٦) مثال تطبيقي Application Example

باستخدام البيانات الحقيقية المعطاة في بحث Nichols and Padgett (2006) وهي عبارة عن 100 قراءة تمثل كسر الإجهاد من ألياف الكربون breaking stress of carbon fibers وقد تم توفيقها بتوزيع وايبل الأسي في بحث Pal, Ali and Woo (2006) وتعطى في الصورة:

3.7	2.74	2.73	2.5	3.6
3.11	3.27	2.87	1.47	3.11
4.42	2.41	3.19	3.22	1.69
3.28	3.09	1.87	3.15	4.9
3.75	2.43	2.95	2.97	3.39
2.96	2.53	2.67	2.93	3.22
3.39	2.81	4.2	3.33	2.55
3.31	3.31	2.85	2.56	3.56
3.15	2.35	2.55	2.59	2.38
2.81	2.77	2.17	2.83	1.92
1.41	3.68	2.97	1.36	0.98
2.76	4.91	3.68	1.84	1.59
3.19	1.57	0.81	5.56	1.73
1.59	2 1.2	2	1.12	1.71
2.17	1.17	5.08	2.48	1.18
3.51	2.17	1.69	1.25	4.38
1.84	0.39	3.68	2.48	0.85
1.61	2.79	4.7	2.03	1.8
1.57	1.08	2.03	1.61	2.12
1.89	2.88	2.82	2.05	3.65

تم الحصول على تقديرات الإمكان الأكبر وتقديرات بييز باستخدام دوال خسارة متماثلة وغير متماثلة اعتمادا على توزيعات قبلية معلمة وأخرى غير معلمة وفيما يلي سيتم عرض النتائج التي تم التوصل إليها.

(٣-٦-١) العينة المراقبة تتابعيا:

حصلنا على التقديرات المختلفة باستخدام أنظمة المراقبة censoring schemes التالية:

(i)- $n=100, r=60,$

$$R=(0,0,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,10,0,0,0,0,0,0,0,10,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,10)$$

$$\underline{x}=\{0.39,0.81,0.85,0.98,1.08,1.12,1.17,1.18,1.22,1.25,1.36,1.41,1.47,1.71,1.73,1.8,1.87,1.89,1.92,2,2.05,2.35,2.38,2.41,2.43,2.48,2.5,2.53,2.56,2.59,2.67,2.73,2.74,2.76,2.77,2.79,2.82,2.83,2.85,2.87,2.88,2.93,2.95,2.96,3.09,3.27,3.28,3.33,3.51,3.56,3.6,3.65,3.68,3.68,3.68,3.7,3.75,4.2,4.38,4.91\}.$$

(ii)- $n=100, r=80,$

$$R=(0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,10,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),$$

$\underline{x} = \{0.39, 0.81, 0.85, 0.98, 1.08, 1.12, 1.17, 1.18, 1.22, 1.25, 1.36, 1.41, 1.47, 1.57, 1.59, 1.61,$
$1.69, 1.71, 1.73, 1.8, 1.84, 1.87, 1.89, 1.92, 2, 2.03, 2.05, 2.12, 2.17, 2.35, 2.38, 2.41, 2.43, 2.48,$
$2.5, 2.53, 2.55, 2.56, 2.59, 2.67, 2.73, 2.74, 2.76, 2.77, 2.79, 2.81, 2.82, 2.83, 2.85, 2.87, 2.88,$
$2.93, 2.95, 2.96, 2.97, 3.09, 3.11, 3.15, 3.19, 3.22, 3.27, 3.28, 3.31, 3.33, 3.39, 3.51, 3.56, 3.6,$
$3.65, 3.68, 3.7, 3.75, 4.2, 4.38, 4.42, 4.7, 4.9, 4.91, 5.08, 5.56\}.$

$n = r = 100,\ R_i = 0, \forall i = 1, 2, ..., n$ -(iii)

$\underline{x} = \{0.39, 0.81, 0.85, 0.98, 1.08, 1.12, 1.17, 1.18, 1.22, 1.25, 1.36, 1.41, 1.47, 1.57, 1.57, 1.59,$
$1.59, 1.61, 1.61, 1.69, 1.69, 1.71, 1.73, 1.8, 1.84, 1.84, 1.87, 1.89, 1.92, 2, 2.03, 2.03, 2.05, 2.12,$
$2.17, 2.17, 2.17, 2.35, 2.38, 2.41, 2.43, 2.48, 2.48, 2.5, 2.53, 2.55, 2.55, 2.56, 2.59, 2.67, 2.73,$
$2.74, 2.76, 2.77, 2.79, 2.81, 2.81, 2.82, 2.83, 2.85, 2.87, 2.88, 2.93, 2.95, 2.96, 2.97, 2.97, 3.09,$
$3.11, 3.11, 3.15, 3.15, 3.19, 3.19, 3.22, 3.22, 3.27, 3.28, 3.31, 3.31, 3.33, 3.39, 3.39, 3.51, 3.56,$
$3.6, 3.65, 3.68, 3.68, 3.68, 3.7, 3.75, 4.2, 4.38, 4.42, 4.7, 4.9, 4.91, 5.08, 5.56\}.$

(٣-٦-١-١) تقديرات الإمكان الأكبر:

اعتمادا على أنظمة المراقبة المفترضة أعلاه وبتطبيـق نتـائج البنـد (٣-٥-١-١) تـم الحصول على تقديرات الإمكان الأكبر لمعلمتي التوزيع ودالتي الصلاحية ومعـدل التعطـل كما تمكنا من إيجاد التباينات والتغايرات التقريبية للتقديرات التي تم الحصول عليهـا وسـيتم عرض النتائج في الجدول (٣-١).

جدول (٣-١): تقديرات الإمكان الأكبر والتباينات والتغايرات (cov) التقريبية وفتـرات الثقـة بدرجـة 95% (بين الأقواس) لمعلمتي التوزيع α,θ ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل اعتمـادا علـى العينـات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني حيث $t = 1$.

CS	$\hat{\alpha}_{ML}$	$\hat{\theta}_{ML}$	$Var(\hat{\alpha}_{ML})$ $Var(\hat{\theta}_{ML})$	$\hat{S}_{ML}(t)$	$\hat{h}_{ML}(t)$
i	0.7506 (0.6587,0.8425)	7.6705 (5.8723,9.4687)	0.0022 0.8417 cov = 0.0216	0.9703	0.1024
ii	1.0042 (0.9082,1.1002)	8.7407 (6.7250,10.7564)	0.0024 1.0576 cov = 0.0244	0.9819	0.0944
iii	1.0265 (0.9388,1.1142)	7.8249 (6.1132,9.5366)	0.0020 0.7627 cov = 0.0175	0.9724	0.1328

(٣-٦-١-٢) تقديرات بييز اعتمادا على التوزيعات القبلية المعلمة:

باستخدام نتائج البند (٣-٥-١-٣-٢-١) تم الحصول على تقديرات بييز على أساس دالتي الخسارة المتماثلة وغير المتماثلةعند أكثر من قيمة لمعلمة الشكل للدالـة BLINEX اعتمـادا على الأنظمة المفترضة وبفرض القيم التالية لمعالم التوزيعات القبلية:

$d = 0.5, b = 2, \nu = 3$

$d = 2, \ b = 1, \nu = 0.5$

$d = 2, b = 0.5, \nu = 4$

وتم تسجيل النتائج المقابلة لكل افتراض في الجداول (٣-٢)،(٣-٣) و (٣-٤).

جدول (٣-٢): تقديرات الإمكان الأكبر وتقديرات بييز لمعلمتي التوزيع α, θ ولدالتي الصلاحية ومعـدل التعطل باستخدام توزيعات قبلية معلمة واعتمادا على عينات مراقبة تتابعيـا مـن النـوع الثـاني حيـث $d = 0.5, b = 2, \nu = 3, \omega = 0.5, t = 1$**.**

	ML	Bayes (MCMC)			
		BSEL	BLINEX		
			$a = -2$	$a = 0.001$	$a = 2$
(i)					
$\hat{\alpha}$	0.7506	0.7471	0.7481	0.7471	0.7460
$\hat{\theta}$	7.6705	7.3607	7.7566	7.3605	6.7654
$\hat{S}(t)$	0.9703	0.9640	0.9642	0.9640	0.9639
$\hat{h}(t)$	0.1024	0.1154	0.1160	0.1154	0.1147
(ii)					
$\hat{\alpha}$	1.0042	1.0031	1.0043	1.0031	1.0019
$\hat{\theta}$	8.7407	8.5085	9.0877	8.5082	7.8218
$\hat{S}(t)$	0.9819	0.9787	0.9787	0.9787	0.9786
$\hat{h}(t)$	0.0944	0.1050	0.1057	0.1050	0.1043
(iii)					
$\hat{\alpha}$	1.0265	1.0237	1.0247	1.0237	1.0226
$\hat{\theta}$	7.8249	7.6281	8.0269	7.6279	7.1112
$\hat{S}(t)$	0.9724	0.9685	0.9686	0.9685	0.9684
$\hat{h}(t)$	0.1328	0.1442	0.1451	0.1442	0.1433

جدول (٣-٣): تقديرات الإمكان الأكبر وتقديرات بييز لمعلمتي التوزيع α,θ ودالتي الصلاحية ومعـدل التعطل باستخدام توزيعات قبلية معلمة واعتمادا على عينات مراقبة تتابعيـا مـن النـوع الثـاني حيـث $d=2,\ b=1,\ \nu=0.5, \omega=0.5, t=1$.

	ML	Bayes (MCMC)			
		BSEL	BLINEX		
			$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
(i)					
$\hat{\alpha}$	0.7506	0.7510	0.7520	0.7510	0.7500
$\hat{\theta}$	7.6705	7.3315	7.7175	7.3313	6.7160
$\hat{S}(t)$	0.9703	0.9635	0.9637	0.9635	0.9633
$\hat{h}(t)$	0.1024	0.1173	0.1181	0.1173	0.1166
(ii)					
$\hat{\alpha}$	1.0042	1.0026	1.0038	1.0026	1.0014
$\hat{\theta}$	8.7407	8.3863	9.0133	8.3860	7.6049
$\hat{S}(t)$	0.9819	0.9779	0.9773	0.9772	0.9771
$\hat{h}(t)$	0.0944	0.1099	0.1109	0.1099	0.1090
(iii)					
$\hat{\alpha}$	1.0265	1.0255	1.0265	1.0255	1.0246
$\hat{\theta}$	7.8249	7.5783	7.9872	7.5781	7.0241
$\hat{S}(t)$	0.9724	0.9676	0.9677	0.9676	0.9675
$\hat{h}(t)$	0.1328	0.1472	0.1483	0.1472	0.1461

جدول (٣-٤): تقديرات الإمكان الأكبر و تقديرات بييز لمعلمتي التوزيع α,θ ولدالتي الصلاحية ومعدل التعطل باستخدام توزيعات قبلية معلمة واعتمادا على عينات مراقبة تتابعيـا مـن النـوع الثـاني حيـث $d=2, b=0.5, \nu=4, \omega=0.5, t=1$.

	ML	Bayes (MCMC)			
		BSEL	BLINEX		
			$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
(i)					
$\hat{\alpha}$	0.7506	0.7489	0.7500	0.7489	0.7478
$\hat{\theta}$	7.6705	7.4416	7.8528	7.4414	6.8918
$\hat{S}(t)$	0.9703	0.9655	0.9656	0.9655	0.9653
$\hat{h}(t)$	0.1024	0.1123	0.1129	0.1123	0.1118
(ii)					
$\hat{\alpha}$	1.0042	1.000	1.0013	1.000	0.9988
$\hat{\theta}$	8.7407	8.4924	9.1468	8.4921	7.7868
$\hat{S}(t)$	0.9819	0.9784	0.9785	0.9784	0.9784
$\hat{h}(t)$	0.0944	0.1053	0.1060	0.1053	0.1046
(iii)					
$\hat{\alpha}$	1.0265	1.0254	1.0264	1.0254	1.0245
$\hat{\theta}$	7.8249	7.6910	8.1694	7.6908	7.2091
$\hat{S}(t)$	0.9724	0.9694	0.9695	0.9694	0.9693
$\hat{h}(t)$	0.1328	0.1413	0.1422	0.1413	0.1405

(٣-٦-١-٣) تقديرات بييز اعتمادا على التوزيعات القبلية غير المعلمة:

باستخدام نتائج البند (٣-٥-١-٣-٢-٢) واعتمادا على أنظمة المراقبـة المفترضـة تـم الحصول على تقديرات بييز المختلفة على أساس دالتي الخسارة المتماثلة وغير المتماثلة وتم عرض النتائج في الجدول (٣-٥).

جدول (٣-٥): تقديرات الإمكان الأكبر وتقديرات بييز لمعلمتي التوزيع α,θ ودالتي الصلاحية ومعـدل التعطل باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة واعتمادا على عينات مراقبة تتابعيا من النـوع الثـاني حيـث $\omega=0.5, t=1$.

	ML	*Bayes (MCMC)*			
		BSEL	*BLINEX*		
			$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
(i)					
$\hat{\alpha}$	0.7506	0.7503	0.7514	0.7503	0.7492
$\hat{\theta}$	7.6705	7.6666	8.3779	7.6663	7.1726
$\hat{S}(t)$	0.9703	0.9689	0.9690	0.9689	0.9688
$\hat{h}(t)$	0.1024	0.1043	0.1048	0.1043	0.1039
(ii)					
$\hat{\alpha}$	1.0042	1.0046	1.0058	1.0046	1.0034
$\hat{\theta}$	8.7407	8.7545	9.7457	8.7542	8.1269
$\hat{S}(t)$	0.9819	0.9810	0.9810	0.9810	0.9810
$\hat{h}(t)$	0.0944	0.0963	0.0969	0.0963	0.0958
(iii)					
$\hat{\alpha}$	1.0265	1.0259	1.0269	1.0259	1.0249
$\hat{\theta}$	7.8249	7.8340	8.5953	7.8338	7.3933
$\hat{S}(t)$	0.9724	0.9714	0.9715	0.9714	0.9713
$\hat{h}(t)$	0.1328	0.1346	0.1354	0.1346	0.1339

(٣-٦-٢) القيم المسجلة الدنيا:

تم الحصول على عينة القيم المسجلة الدنيا من بيانات المثال أعلاه على الشكل التالي:

$$\underline{x}=\{3.7,2.74,2.73,2.5,1.47,1.41,1.36,0.98,0.81,0.39\}$$

(٣-٦-٢-١) تقديرات الإمكان الأكبر:

اعتمادا على عينة القيم المسجلة الدنيا $\underline{x}$ وبتطبيق نتائج البند (٣-٥-٢-١) تم الحصول على تقديرات الإمكان الأكبر لمعلمتي التوزيع ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل كما تمكنـا من إيجاد التباينات والتغايرات التقريبية للتقديرات التي تم الحصول عليهـا وسـيتم عـرض النتائج في الجدول (٣-٦).

جدول (٣-٦): تقديرات الإمكان الأكبر والتباينات والتغايرات (cov) وفترات الثقة بدرجة 95% (بين الأقواس) لمعلمتي التوزيع α,θ ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل اعتمادا على القيم المسجلة الدنيا حيث $t=1$.

r	$\hat{\alpha}_{ML}$	$\hat{\theta}_{ML}$	$Var(\hat{\alpha}_{ML})$	$Var(\hat{\theta}_{ML})$	$\hat{S}_{ML}(t)$	$\hat{h}_{ML}(t)$
10	0.6950 (0.3045,10.855)	11.0735 (3.3968,18.752)	0.0397	15.3403	0.9938	0.0281
			cov = -0.3496			

(٣-٦-٢-٢) تقديرات بييز اعتمادا على التوزيعات القبلية المعلمة:

باستخدام نتائج البند (٣-٥-٢-٣-٢-١) تم الحصول على تقديرات بييز على أساس دالتي الخسارة المتماثلة وغير المتماثلة عند أكثر من قيمة لمعلمة الشكل للدالة BLINEX اعتمادا على عينة القيم المسجلة الدنيا الناتجة بفرض القيم التالية لمعالم التوزيعات القبلية:

$d=0.5, b=2, \nu=3.$

$d=2, b=1, \nu=0.5.$

$d=2, b=0.5, \nu=4.$

وسجلنا النتائج المقابلة لكل افتراض في الجدول (٣-٧).

جدول (٣-٧): تقديرات الإمكان الأكبر و تقديرات بييز لمعلمتي التوزيع α,θ ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل باستخدام توزيعات قبلية معلمة واعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\omega=0, t=1$.

	ML	Bayes (MCMC)					
		BSEL	BLINEX				
			a=-5	a=-2	a=2	a=3	a=5
$d=0.5, b=2, \nu=3$							
$\hat{\alpha}$	0.6950	0.6991	0.7000	0.6995	0.6987	0.6985	0.6981
$\hat{\theta}$	11.074	5.7132	10.594	8.8807	4.1454	3.6794	2.9986
$\hat{S}(t)$	0.9938	0.9084	0.9165	0.9119	0.9046	0.9026	0.8980
$\hat{h}(t)$	0.0281	0.2016	0.2240	0.2101	0.1936	0.1898	0.1826
$d=2, b=1, \nu=0.5$							
$\hat{\alpha}$	0.6950	0.7002	0.7012	0.7006	0.6998	0.6996	0.6992
$\hat{\theta}$	11.074	4.3949	8.8213	6.9441	3.1961	2.8407	2.3625
$\hat{S}(t)$	0.9938	0.8427	0.8595	0.8500	0.8343	0.8298	0.8196
$\hat{h}(t)$	0.0281	0.2929	0.3235	0.3047	0.2817	0.2763	0.2660
$d=2, b=0.5, \nu=4$							
$\hat{\alpha}$	0.6950	0.6991	0.7001	0.6995	0.6987	0.6985	0.6982
$\hat{\theta}$	11.074	5.9653	10.232	8.6181	4.4661	4.0521	3.4873
$\hat{S}(t)$	0.9938	0.9193	0.9254	0.9219	0.9165	0.9150	0.9118
$\hat{h}(t)$	0.0281	0.1855	0.2039	0.1925	0.1788	0.1756	0.1696

(٣-٦-٢-٣) تقديرات بييز اعتمادا على التوزيعات القبلية غير المعلمة:

باستخدام نتائج البند (٣-٥-٢-٣-٢-٢) واعتمادا على عينة القيم المسجلة الناتجة تم الحـصول على تقديرات بييز المختلفة المتماثلة وغير المتماثلة باستخدام أكثر من قيمة لمعلمـة الـشكل لدالة الخسارة BLINEX وتم عرض النتائج في الجدول (٣-٨).

جدول (٣-٨): تقديرات الإمكان الأكبر وتقديرات بييز لمعلمتي التوزيع α,θ ولدالتي الصلاحية ومعـدل التعطل باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة واعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\omega = 0, t = 1$.

	ML	Bayes (MCMC)					
		BSEL	BLINEX				
			a=-5	*a=-2*	*a=2*	*a=3*	*a=5*
$\hat{\alpha}$	0.6950	1.0396	1.0406	1.0400	1.0393	1.0391	1.0387
$\hat{\theta}$	11.074	7.6800	11.178	10.145	5.4482	4.7925	4.1000
$\hat{S}(t)$	0.9938	0.9598	0.9622	0.9608	0.9587	0.9581	0.9568
$\hat{h}(t)$	0.0281	0.1654	0.1923	0.1750	0.1570	0.1531	0.1460

(٣-٧) دراسة المحاكاة Simulation Study

في المثال السابق تم توضيح كيفية الاستفادة من النتائج التي تم الحصول عليها في هذا الفصل في التطبيقات الفعلية، ولكن من الواضح في هذا المثال أنه لا يمكننا عمل أي مقارنات بين المقدرات المختلفة لمعلمتي التوزيع ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل وذلك بسبب عدم معرفتنا بالقيم الحقيقية لهذه القياسات. ورغبة منا في الوقوف على مدى كفاءة وسلوك طرق التقدير التي تم الحصول عليها في هذا الفصل يلزمنا عمل مقارنات عددية باستخدام دراسة المحاكاة، ومن المعلوم أيضا أن عينة واحدة لا تعطي المطلوب، لذا خصص هذا البند لعمل دراسة المحاكاة بغرض المقارنة بين طرق التقدير والوقوف على مدى تأثرها بافتراضاتنا المختلفة للتوزيعات القبلية وبدوال الخسارة المختلفة التي تمت مناقشتها في هذا الفصل.

تم توليد مجموعة من العينات المراقبة تتابعيا بأحجام مختلفة وتم توليد عينات من قيم مسجلة دنيا بأحجام مختلفة أيضا باستخدام طرق التوليد التي تم عرضها في الفصل الثاني مع العلاقة (3.62)، وتم حساب التقديرات المختلفة لمعلمتي التوزيع ولدالتي الـصلاحية ومعـدل التعطل وعمل المقارنات طبقا للخطوات التالية:

١- تم توليد عينات مراقبة تتابعيا من توزيع وايبل الأسي بالمعلمة θ في حالة معلومية المعلمة α وبالمعالم (α_1,θ_1) و(α_2,θ_2) في حالة عدم معلومية المعلمتين بأحجام مختلفة $n = 25,30,50,70$ و باستخدام أنظمة مراقبة مختلفة بحيث يكون $\sum R_i = n-r = 10$ كما بالجدول (٣-٩)، أيضا تم توليد عينات من قيم مسجلة دنيا من توزيع وايبل الأسي باستخدام نفس قيم المعالم أعلاه بأحجام مختلفة $r = (4,6,,8)$.

جدول (٣-٩): أنظمة المراقبة المختلفة التي تم توليد العينات باستخدامها.

CS	n	r	R
i	25	15	(0,0,3,0,2,0,3,1,0,0,0,0,0,0,1)
ii	30	20	(0,0,0,0,0,0,0,0,3,2,3,0,0,0,0,0,0,0,0,2)
iii	50	40	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,5,0,0,5, 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
iv	70	60	(0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0,0,0,3,1,0,0, 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1)

٢- تم حساب تقديرات الإمكان الأكبر لمعلمة (لمعلمتي) التوزيع ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل باستخدام نتائج البند (٣-٥-١-١) في حالة العينات المراقبة ونتائج البند (٣-٥-٢-١) في حالة القيم المسجلة الدنيا.

٣- تم حساب تقديرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة المتماثلة BSEL ودالة الخسارة غير المتماثلة BLINEX عند أكثر من قيمة لمعلمة الشكل a، واعتمادا على التوزيعات القبلية المعلمة وغير المعلمة والتي تم افتراضها في هذا الفصل كمايلي:

- **تقديرات بييز اعتمادا على التوزيعات القبلية المعلمة:**

- تم اختيار قيم معالم التوزيعين القبليين بحيث يكون متوسط التوزيع لكل معلمة قريب من قيمة المعلمة التي تم توليدها باستخدامه والتي أعطت أفضل شكل لدالة كثافة الاحتمال.

- في حالة معلومية المعلمة $\alpha = 2$ تم توليد قيمة للمعلمة $\theta = 2.4297$ من التوزيع القبلي $\Gamma(4,2)$ و تم حساب مقدرات بييز المختلفة باستخدام نتائج البند (٣-٥-١-٣-١-١) للعينات المراقبة ونتائج البند (٣-٥-٢-٣-١-١) للقيم المسجلة الدنيا.

- تم توليد قيمة $\alpha_1 = 1.2240$ من التوزيع القبلـي $\Gamma(0.5,0.5)$ وقيمـة $\theta_1 = 4.1074$ مـن التوزيع القبلي $\Gamma(4,1/\alpha_1)$ بالمثل تم توليد قيمة أخرى $\alpha_2 = 2.3008$ مـن $\Gamma(2,1)$ وقيمـة أخرى $\theta_2 = 2.0481$ من $\Gamma(2,1/\alpha_2)$ و تم حساب تقديرات بييز المختلفة باستخدام نتائج البند (٣-٥-١-٣-٢-١) للعينات المراقبة ونتائج البند (٣-٥-٢-٣-٢-١) للقيم المسجلة الدنيا.

- **تقديرات بييز اعتمادا على التوزيعات القبلية غير المعلمة:**

- تم اعتبار قيمتين لكلا المعلمتين على النحو التالي:

$$\alpha_1 = 2, \theta_1 = 1.5,$$
$$\alpha_2 = 1.5, \theta_2 = 2.5.$$

- تم حساب تقديرات بييز المختلفة في حالة معلومية المعلمة $\alpha = 2$ باستخدام نتائج البند (٣-٥-١-٣-١-٢) للعينات المراقبة ونتائج البند (٣-٥-٢-٣-١-٢) للقيم المسجلة الدنيا.
- تم حساب تقديرات بييز المختلفة في حالة عدم معلومية المعلمتين باستخدام نتائج البند (٣-٥-١-٣-٢-٢) للعينات المراقبة ونتائج البند (٣-٥-٢-٣-٢-٢) للقيم المسجلة الدنيا.

٤- الخطوات من ٢ إلى ٣ تم تكرارها ($T = 1000$)مرة في حالـة العينـات المراقبـة تتابعيا، كما تم تكرارها ($T = 500$) في حالة القيم المسجلة الدنيا، وذلك لكل حالـة مـن الحالات المقابلة لحجم العينة وباعتبار معلومية أحد معلمتي التوزيع أو عـدم معلوميـة المعلمتين وباستخدام التوزيعات القبلية المعلمة وغير المعلمة.

٥- تم حساب متوسط التقديرات AV، ومخاطرة بييز المقدرة ER لمختلـف التقـديرات حيث تم اعتبار قيم المعالم المفترضة في كل حالة وقيم دالتي الصلاحية ومعدل التعطـل المقابلة عند الزمن $t = 1$ هي القيم المضبوطة.

وذلك باستخدام العلاقات التالية:

$$AV = \sum_{i=1}^{T} \frac{\hat{\lambda}_i}{T} \quad , \quad ER = \sum_{i=1}^{T} \frac{(\hat{\lambda}_i - \lambda)^2}{T} \qquad (3.149)$$

حيث λ تمثل المعلمة و $\hat{\lambda}_i$ هي تقدير المعلمة λ من العينة i.

النتائج العددية للحسابات المختلفة تم عرضها في الجداول (من (٣-١٠) إلى (٣-٢١)).

جدول (٣-١٠): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للمعلمة θ ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل عندما $\alpha = 2$ اعتمادا على عينات مراقبة تتابعيا من النوع الثاني حيث $\delta = 2,\ \nu = 4, \theta = 2.4297,$ $\omega = 0.5, t = 1$.

		ML	Bayes			
			BSEL	BLINEX		
				$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
i						
$\hat{\theta}$	AV	2.5315	2.0736	2.4219	2.0731	1.0149
	ER	0.3201	0.3341	0.3082	0.3343	2.5396
$\hat{S}(t)$	AV	0.6770	0.5625	0.6040	0.5625	0.4978
	ER	0.0060	0.0171	0.0050	0.0171	0.0443
$\hat{h}(t)$	AV	1.3552	1.5641	1.8029	1.5640	1.4506
	ER	0.0399	0.0605	0.2438	0.0605	0.0321
ii						
$\hat{\theta}$	AV	2.5029	2.0343	2.3928	2.0338	0.9396
	ER	0.2433	0.3135	0.2384	0.3137	2.4664
$\hat{S}(t)$	AV	0.6754	0.5544	0.6000	0.5544	0.4818
	ER	0.0042	0.0168	0.0041	0.0168	0.0434
$\hat{h}(t)$	AV	1.3629	1.5795	1.8349	1.5794	1.4597
	ER	0.0293	0.0589	0.2379	0.0589	0.0288
iii						
$\hat{\theta}$	AV	2.5027	2.017	2.3924	2.0165	0.8594
	ER	0.1612	0.2715	0.1567	0.2718	2.2223
$\hat{S}(t)$	AV	0.6777	0.5489	0.5996	0.5488	0.4659
	ER	0.0030	0.0163	0.0029	0.0163	0.0040
$\hat{h}(t)$	AV	1.3599	1.5869	1.8667	1.5867	1.4583
	ER	0.0203	0.0554	0.2099	0.0554	0.0201
iv						
$\hat{\theta}$	AV	2.5181	2.0241	2.4076	2.0236	0.8362
	ER	0.0960	0.2215	0.0883	0.2218	2.0068
$\hat{S}(t)$	AV	0.6821	0.5500	0.6029	0.5500	0.4628
	ER	0.0019	0.0160	0.0013	0.0160	0.0031
$\hat{h}(t)$	AV	1.3516	1.5833	1.8736	1.5832	1.4507
	ER	0.0124	0.0484	0.1850	0.0484	0.0122

جدول (٣-١١): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للمعلمة θ ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل عنــدما $\alpha = 2$ اعتمــادا علــى عينــات مراقبــة تتابعيــا مــن النــوع الثــاني حيــث $\theta = 1.5, \omega = 0.5, c = 4, t = 1$.

		ML	*Bayes*			
			BSEL	*BLINEX*		
				$a = -2$	$a = 0.001$	$a = 2$
i						
$\hat{\theta}$	*AV*	1.7534	1.4318	1.6483	1.4316	0.8574
	ER	0.2786	0.1475	0.2333	0.1474	0.4201
$\hat{S}(t)$	*AV*	0.5432	0.4475	0.4779	0.4474	0.5627
	ER	0.0094	0.0096	0.0067	0.0096	0.0182
$\hat{h}(t)$	*AV*	1.6613	1.8199	1.9555	1.8198	1.7467
	ER	0.0460	0.0271	0.0647	0.0271	0.0331
ii						
$\hat{\theta}$	*AV*	1.5550	1.2618	1.4509	1.2616	0.7881
	ER	0.0717	0.1018	0.0691	0.1018	0.5501
$\hat{S}(t)$	*AV*	0.5065	0.4131	0.442	0.4131	0.3714
	ER	0.0064	0.0094	0.0059	0.0094	0.0179
$\hat{h}(t)$	*AV*	1.7422	1.8911	2.0063	1.8910	1.8258
	ER	0.0138	0.0251	0.0641	0.0250	0.0139
iii						
$\hat{\theta}$	*AV*	1.5889	1.2799	1.4836	1.2797	0.7574
	ER	0.0714	0.0898	0.0627	0.0899	0.5234
$\hat{S}(t)$	*AV*	0.5143	0.4154	0.4474	0.4154	0.3682
	ER	0.0053	0.0087	0.0050	0.0087	0.0178
$\hat{h}(t)$	*AV*	1.7270	1.8840	2.0130	1.8840	1.8127
	ER	0.0136	0.0224	0.0629	0.0223	0.0135
iv						
$\hat{\theta}$	*AV*	1.6046	1.2895	1.4989	1.2893	0.7479
	ER	0.0693	0.0820	0.0573	0.0821	0.5170
$\hat{S}(t)$	*AV*	0.5181	0.4171	0.4503	0.4171	0.3678
	ER	0.0051	0.0082	0.0045	0.0082	0.0178
$\hat{h}(t)$	*AV*	1.7198	1.8800	2.0143	1.8800	1.8063
	ER	0.0130	0.0206	0.0626	0.0206	0.0119

جدول(٣-١٢): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للمعلمة θ ولدالتي الصلاحية ومعدل التعطـل عندما $\alpha = 2$ اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\alpha = 2,\ \theta = 2.4297,\ \delta = 2, \nu = 4, \omega = 0,$ $t = 1$.

		ML	Bayess					
			BSEL	BLINEX				
				a=-5	a=-2	a=2	a=3	a=5
r = 4								
$\hat{\theta}$	AV	4.8904	3.0440	4.7608	4.5612	1.3616	1.1946	1.0065
	ER	18.983	4.5288	18.388	17.369	2.1623	2.9619	3.7484
$\hat{S}(t)$	AV	0.7949	0.5958	0.6866	0.6388	0.5488	0.5260	0.4852
	ER	0.0414	0.0253	0.0244	0.0229	0.0323	0.0373	0.0943
$\hat{h}(t)$	AV	0.9236	1.4240	1.8746	1.6868	1.1904	1.1269	1.0566
	ER	0.4999	0.1470	0.5461	0.1832	0.2825	0.3326	0.3894
r = 6								
$\hat{\theta}$	AV	3.0851	2.5428	3.0405	2.9758	1.1299	0.8826	0.6599
	ER	2.3220	1.2839	2.2654	2.1851	1.7199	2.4139	3.1486
$\hat{S}(t)$	AV	0.7160	0.6036	0.6747	0.6441	0.5397	0.5013	0.4257
	ER	0.0193	0.0181	0.0171	0.0166	0.0315	0.0366	0.0653
$\hat{h}(t)$	AV	1.2161	1.4386	2.0242	1.7259	1.3119	1.2863	1.2603
	ER	0.1769	0.1088	0.4205	0.1552	0.1485	0.1565	0.1639
r = 8								
$\hat{\theta}$	AV	3.0090	2.4433	2.9644	2.8988	0.9618	0.7101	0.4947
	ER	1.5567	0.8050	1.5070	1.4387	1.3030	1.6476	2.1073
$\hat{S}(t)$	AV	0.7209	0.5924	0.6784	0.6432	0.5087	0.4592	0.3674
	ER	0.0142	0.0148	0.0116	0.0115	0.0270	0.0485	0.0490
$\hat{h}(t)$	AV	1.2191	1.4622	2.1188	1.7957	1.3182	1.2906	1.2635
	ER	0.1283	0.0758	0.2778	0.1457	0.1024	0.1091	0.1157

جدول (٣-١٣): متوسط التقديرات ومخاطرة بيز المقدرة للمعلمة θ ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل عندما $\alpha = 2$ اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\theta = 1.5, \omega = 0.5, c = 4, t = 1$.

		ML	Bayes					
			BSEL	BLINEX				
				a=-5	a=-2	a=2	a=3	a=5
r = 4								
$\hat{\theta}$	AV	2.1497	1.2767	2.0128	1.8440	0.6673	0.5623	0.4509
	ER	1.9185	0.9923	1.8144	1.7404	0.7394	0.9105	1.2211
$\hat{S}(t)$	AV	0.5777	0.3691	0.4668	0.4155	0.3203	0.2980	0.2607
	ER	0.0381	0.0325	0.0295	0.0284	0.0422	0.0487	0.0624
$\hat{h}(t)$	AV	1.5453	1.9300	2.2143	2.0899	1.7795	1.7320	1.6736
	ER	0.2274	0.0996	0.2128	0.1307	0.1783	0.1964	0.2054
r = 6								
$\hat{\theta}$	AV	2.2467	1.8318	2.2021	2.1413	0.8874	0.6802	0.4781
	ER	1.8792	0.5714	1.7555	1.5212	0.4934	0.8846	1.1220
$\hat{S}(t)$	AV	0.6002	0.4951	0.5600	0.5318	0.4375	0.4032	0.3364
	ER	0.0372	0.0190	0.0288	0.0246	0.0157	0.0276	0.0393
$\hat{h}(t)$	AV	1.5009	1.6886	2.1404	1.9015	1.5896	1.5677	1.5442
	ER	0.2252	0.0736	0.1862	0.0587	0.1389	0.1523	0.1785
r = 8								
$\hat{\theta}$	AV	2.0416	1.6482	1.9970	1.9356	0.8004	0.5939	0.3938
	ER	1.1321	0.5666	1.0857	1.0210	0.4083	0.6229	1.0545
$\hat{S}(t)$	AV	0.5781	0.4692	0.5374	0.5081	0.4079	0.3717	0.3021
	ER	0.0258	0.0137	0.0203	0.0168	0.0149	0.0101	0.0306
$\hat{h}(t)$	AV	1.5650	1.7509	2.1890	1.9539	1.6542	1.6323	1.6085
	ER	0.1495	0.0121	0.1415	0.0412	0.1151	0.1243	0.1335

جدول (٣-١٤): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة لمعلمتي التوزيع α,θ ولـدالتي الـصلاحية ومعـدل التعطـل اعتمـادا علـى عينـات مراقبـة تتابعيـا مـن النـوع الثـاني حيـث $\alpha = 1.2240,\ \theta = 4.1074,\ d = 0.5,\ b = 2,\ \nu = 4,\ \omega = 0.5, t = 1$.

		ML	Bayes (MCMC)			
			BSEL	BLINEX		
				$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
i						
$\hat{\alpha}$	AV	1.2928	1.2712	1.2882	1.2712	1.2527
	ER	0.0439	0.0379	0.0418	0.0379	0.0340
$\hat{\theta}$	AV	4.3601	4.3719	5.2130	4.3717	3.9421
	ER	1.0238	0.8975	3.2618	0.8972	0.4617
$\hat{S}(t)$	AV	0.8520	0.8493	0.8508	0.8493	0.8476
	ER	0.0033	0.0028	0.0028	0.0028	0.0029
$\hat{h}(t)$	AV	0.5308	0.5215	0.5316	0.5215	0.5117
	ER	0.0263	0.0206	0.0216	0.0206	0.0196
ii						
$\hat{\alpha}$	AV	1.3196	1.3009	1.3149	1.3009	1.2858
	ER	0.0402	0.0347	0.0383	0.0347	0.0310
$\hat{\theta}$	AV	4.3158	4.3301	4.9458	4.3299	3.9829
	ER	0.8795	0.8124	2.3257	0.8121	0.4613
$\hat{S}(t)$	AV	0.8507	0.8483	0.8496	0.8483	0.8470
	ER	0.0030	0.0026	0.0026	0.0026	0.0027
$\hat{h}(t)$	AV	0.5451	0.5371	0.5454	0.5371	0.5289
	ER	0.0249	0.0202	0.0213	0.0202	0.0192
iii						
$\hat{\alpha}$	AV	1.23495	1.2277	1.2331	1.2277	1.2221
	ER	0.0100	0.0097	0.0099	0.0097	0.0095
$\hat{\theta}$	AV	4.2188	4.2285	4.4898	4.2284	4.03695
	ER	0.4200	0.3985	0.6776	0.3984	0.3036
$\hat{S}(t)$	AV	0.8496	0.8480	0.8488	0.8480	0.8472
	ER	0.0017	0.0015	0.0015	0.0015	0.0016
$\hat{h}(t)$	AV	0.5187	0.5161	0.5203	0.5161	0.5119
	ER	0.0102	0.0092	0.0093	0.0092	0.0092
iv						
$\hat{\alpha}$	AV	1.2407	1.2358	1.2394	1.2358	1.2321
	ER	0.0068	0.0066	0.0068	0.0066	0.0065
$\hat{\theta}$	AV	4.1060	4.1169	4.2801	4.1168	3.9879
	ER	0.2893	0.2783	0.3677	0.2783	0.2509
$\hat{S}(t)$	AV	0.8434	0.8424	0.8430	0.8424	0.8418
	ER	0.0014	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
$\hat{h}(t)$	AV	0.5361	0.5339	0.5370	0.5339	0.5308
	ER	0.0071	0.0065	0.0066	0.0065	0.0064

جدول (٣-١٥): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة لمعلمتي التوزيع α,θ ولدالتي الصلاحية ومعدل التعطل اعتمادا على عينات مراقبة تتابعيا من النوع الثاني حيث $\alpha = 2.3008,\ \theta = 2.0481,\ d = 2,\ b = 1,\ \nu = 2,\ \omega = 0.5\ ,t = 1$ **.**

		ML	*Bayes (MCMC)*			
			BSEL	*BLINEX*		
				$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
i						
$\hat{\alpha}$	*AV*	2.5236	2.4163	2.5223	2.4162	2.2789
	ER	0.3169	0.2156	0.3017	0.2156	0.1337
$\hat{\theta}$	*AV*	2.1112	2.1903	2.3734	2.1903	2.0861
	ER	0.2176	0.2139	0.3618	0.2138	0.1643
$\hat{S}(t)$	*AV*	0.6122	0.6224	0.6255	0.6224	0.6195
	ER	0.0057	0.0049	0.0050	0.0049	0.0049
$\hat{h}(t)$	*AV*	1.9243	1.81095	1.9263	1.8109	1.6759
	ER	0.3031	0.1986	0.2916	0.1986	0.1258
ii						
$\hat{\alpha}$	*AV*	2.4551	2.3700	2.4545	2.3700	2.2643
	ER	0.2787	0.2035	0.2660	0.2034	0.1306
$\hat{\theta}$	*AV*	2.0774	2.1375	2.2583	2.1374	2.0588
	ER	0.1459	0.1405	0.1967	0.1406	0.1188
$\hat{S}(t)$	*AV*	0.6085	0.6163	0.6187	0.6163	0.6139
	ER	0.0046	0.0040	0.0040	0.0040	0.0040
$\hat{h}(t)$	*AV*	1.8884	1.7986	1.8894	1.7986	1.6931
	ER	0.2947	0.1083	0.2869	0.1082	0.1269
iii						
$\hat{\alpha}$	*AV*	2.3691	2.3355	2.3669	2.3355	2.3005
	ER	0.0783	0.0682	0.0762	0.0682	0.0611
$\hat{\theta}$	*AV*	2.1030	2.1339	2.1928	2.1338	2.0876
	ER	0.1007	0.1016	0.1246	0.1016	0.0887
$\hat{S}(t)$	*AV*	0.6150	0.6187	0.6200	0.6187	0.6173
	ER	0.0029	0.0028	0.0028	0.0028	0.0027
$\hat{h}(t)$	*AV*	1.7949	1.7581	1.7928	1.7581	1.7207
	ER	0.0856	0.0746	0.0828	0.0746	0.0675
iv						
$\hat{\alpha}$	*AV*	2.3357	2.3146	2.3348	2.3146	2.2930
	ER	0.0388	0.0358	0.0381	0.0358	0.0341
$\hat{\theta}$	*AV*	2.0610	2.0818	2.1197	2.0818	2.0497
	ER	0.0664	0.0665	0.0750	0.0665	0.0616
$\hat{S}(t)$	*AV*	0.6088	0.6112	0.6122	0.6112	0.6103
	ER	0.0019	0.0019	0.0018	0.0019	0.0019
$\hat{h}(t)$	*AV*	1.7849	1.7614	1.7839	1.7614	1.7377
	ER	0.0420	0.0384	0.0411	0.0384	0.0365

جدول (٣-١٦): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة لمعلمتي التوزيع α,θ ولـدالتي الـصلاحية ومعــدل التعطــل اعتمــادا علــى عينــات مراقبــة تتابعيــا مــن النــوع الثــاني حيــث $\alpha = 2,\ \theta = 1.5,\ \omega = 0.5\ ,t = 1$ **.**

		ML	Bayes (MCMC)			
			BSEL	BLINEX		
				$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
i						
$\hat{\alpha}$	AV	2.3091	2.3529	2.6017	2.3528	2.2061
	ER	0.4878	0.5490	1.3066	0.5489	0.3190
$\hat{\theta}$	AV	1.4892	1.4861	1.5718	1.4861	1.4228
	ER	0.1270	0.1274	0.1531	0.1273	0.1188
$\hat{S}(t)$	AV	0.4882	0.4841	0.4874	0.4841	0.4808
	ER	0.0069	0.0069	0.0068	0.0069	0.0070
$\hat{h}(t)$	AV	2.0756	2.1323	2.5184	2.1322	1.9427
	ER	0.5899	0.6791	2.1956	0.6788	0.3444
ii						
$\hat{\alpha}$	AV	2.2666	2.3025	2.4805	2.3024	2.1920
	ER	0.3001	0.3368	0.6755	0.3367	0.2214
$\hat{\theta}$	AV	1.4779	1.4745	1.5368	1.4744	1.4250
	ER	0.1049	0.1054	0.1185	0.1054	0.1011
$\hat{S}(t)$	AV	0.4868	0.4834	0.4860	0.4834	0.4807
	ER	0.0055	0.0056	0.0056	0.0056	0.0055
$\hat{h}(t)$	AV	2.0345	2.0806	2.3549	2.0806	1.9398
	ER	0.3741	0.4280	1.1479	0.4279	0.2546
iii						
$\hat{\alpha}$	AV	2.1014	2.1082	2.1434	2.1082	2.0754
	ER	0.0913	0.0941	0.1108	0.0941	0.0817
$\hat{\theta}$	AV	1.5048	1.5045	1.5350	1.5045	1.4773
	ER	0.0520	0.0521	0.0568	0.0521	0.0497
$\hat{S}(t)$	AV	0.4958	0.4943	0.4957	0.4943	0.4929
	ER	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028
$\hat{h}(t)$	AV	1.8583	1.8685	1.9164	1.8684	1.8264
	ER	0.1046	0.1091	0.1361	0.1092	0.0916
iv						
$\hat{\alpha}$	AV	2.0409	2.0446	2.0655	2.0446	2.0246
	ER	0.0478	0.0485	0.0532	0.0485	0.0450
$\hat{\theta}$	AV	1.5268	1.5272	1.5487	1.5272	1.5074
	ER	0.0470	0.0470	0.0509	0.0470	0.0443
$\hat{S}(t)$	AV	0.5012	0.5002	0.5013	0.5002	0.4992
	ER	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023
$\hat{h}(t)$	AV	1.7924	1.7980	1.8256	1.798	1.7725
	ER	0.0560	0.0571	0.0640	0.0571	0.0525

جدول (٣-١٧): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة لمعلمتي التوزيع α,θ ولـ دالتي الـصلاحية ومعـدل التعطـل اعتمـادا علـى عينـات مراقبـة تتابعيـا مـن النـوع الثـاني حيـث $\alpha = 1.5,\ \theta = 2.5,\ \omega = 0.5\ ,t = 1$ **.**

		ML	Bayes (MCMC)			
			BSEL	BLINEX		
				$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
i						
$\hat{\alpha}$	AV	1.5995	1.6083	1.6554	1.6083	1.5670
	ER	0.1135	0.1189	0.1556	0.1189	0.0957
$\hat{\theta}$	AV	2.6091	2.6085	2.8512	2.6085	2.4508
	ER	0.3417	0.3425	0.5952	0.3425	0.2649
$\hat{S}(t)$	AV	0.6872	0.6824	0.6852	0.6824	0.6795
	ER	0.0069	0.0068	0.0068	0.0068	0.0069
$\hat{h}(t)$	AV	1.0797	1.0939	1.1475	1.0939	1.0536
	ER	0.1334	0.1421	0.1985	0.1421	0.1138
ii						
$\hat{\alpha}$	AV	1.5905	1.5982	1.6333	1.5982	1.5661
	ER	0.1088	0.1126	0.1337	0.1126	0.0972
$\hat{\theta}$	AV	2.5247	2.5209	2.6739	2.5209	2.4051
	ER	0.2378	0.2375	0.3339	0.2374	0.2059
$\hat{S}(t)$	AV	0.6783	0.6741	0.6764	0.6742	0.6718
	ER	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047
$\hat{h}(t)$	AV	1.0861	1.0982	1.1346	1.0981	1.0682
	ER	0.0935	0.0986	0.1220	0.0985	0.0836
iii						
$\hat{\alpha}$	AV	1.5375	1.5386	1.5505	1.5386	1.5270
	ER	0.0199	0.0203	0.0720	0.0203	0.0189
$\hat{\theta}$	AV	2.5813	2.5805	2.6644	2.5805	2.5096
	ER	0.1840	0.1837	0.2317	0.1837	0.1572
$\hat{S}(t)$	AV	0.6885	0.6863	0.6876	0.6863	0.6849
	ER	0.0031	0.0030	0.0030	0.0030	0.0030
$\hat{h}(t)$	AV	1.0247	1.0283	1.0408	1.0283	1.0166
	ER	0.0234	0.0237	0.0253	0.0237	0.0226
iv						
$\hat{\alpha}$	AV	1.5461	1.5470	1.5549	1.5470	1.5393
	ER	0.0165	0.0165	0.0176	0.0165	0.0155
$\hat{\theta}$	AV	2.5392	2.5383	2.5935	2.5383	2.4893
	ER	0.1090	0.1095	0.1273	0.1095	0.1000
$\hat{S}(t)$	AV	0.6845	0.6828	0.6838	0.6828	0.6818
	ER	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021
$\hat{h}(t)$	AV	1.0395	1.0423	1.0507	1.0423	1.0342
	ER	0.0158	0.0161	0.0171	0.0161	0.0153

جدول (٣-١٨): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة لمعلمتي التوزيع α,θ ولـ دالتي الـصلاحية ومعـدل التعطـل اعتمـادا علـى قـيم مـسجلة دنيـا حيـث $\alpha=1.2240,\ \theta=4.1074,\ d=0.5,$ $b=2,\ v=4,\ \omega=0.5, t=1$ **.**

		ML	Bayes (MCMC)					
			BSEL	BLINEX				
				a=-5	a=-2	a=2	a=3	a=5
r = 4								
$\hat{\alpha}$	AV	1.0214	1.0175	1.0782	1.0416	0.9936	0.9817	0.9582
	ER	0.0904	0.0843	0.0675	0.0767	0.0930	0.0977	0.1079
$\hat{\theta}$	AV	9.7678	5.0716	11.194	9.3414	3.2019	2.7845	2.2729
	ER	565.78	3.5733	64.196	40.677	1.2800	2.0622	3.5673
$\hat{S}(t)$	AV	0.9242	0.8505	0.8710	0.8595	0.8400	0.8342	0.8211
	ER	0.0099	0.0037	0.0033	0.0034	0.0042	0.0045	0.0056
$\hat{h}(t)$	AV	0.2240	0.3664	0.4597	0.3991	0.3387	0.3265	0.3047
	ER	0.1126	0.0401	0.0107	0.0220	0.0475	0.0510	0.0580
r = 6								
$\hat{\alpha}$	AV	0.9621	0.9784	1.0256	1.0256	0.9971	0.9600	0.9509
	ER	0.0901	0.0809	0.0620	0.0729	0.0895	0.0940	0.1034
$\hat{\theta}$	AV	7.0525	5.1066	10.562	10.562	3.7195	3.4732	3.0596
	ER	19.285	2.6186	49.888	28.732	0.7661	1.3468	2.6364
$\hat{S}(t)$	AV	0.9268	0.8642	0.8705	0.8795	0.8708	0.8566	0.8525
	ER	0.0099	0.0032	0.0033	0.0032	0.0033	0.0034	0.0038
$\hat{h}(t)$	AV	0.2182	0.3458	0.4187	0.4187	0.3718	0.3234	0.3133
	ER	0.1110	0.0383	0.0103	0.0189	0.0403	0.0463	0.0537
r = 8								
$\hat{\alpha}$	AV	0.9720	0.9936	1.0387	1.0114	0.9762	0.9676	0.9506
	ER	0.0853	0.0732	0.0571	0.0663	0.0806	0.0845	0.0927
$\hat{\theta}$	AV	6.7305	5.1769	9.7598	8.0553	3.7009	3.2989	2.7812
	ER	16.606	2.5775	38.472	21.351	0.5526	0.9233	1.9484
$\hat{S}(t)$	AV	0.9246	0.8736	0.8858	0.8789	0.8678	0.8646	0.8578
	ER	0.0092	0.0031	0.0033	0.0032	0.0031	0.0031	0.0031
$\hat{h}(t)$	AV	0.2349	0.3426	0.4095	0.3665	0.3218	0.3124	0.2953
	ER	0.1011	0.0311	0.0102	0.0128	0.0302	0.0449	0.0503

جدول (٣-١٩): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة لمعلمتي التوزيع α,θ ولـدالتي الـصلاحية ومعدل التعطل اعتمادا على قيم مـسجلة دنيـا حيـث $\alpha = 2.3008, \theta = 2.0481, d = 2, b = 1, v = 2,$ $\omega = 0.5, t = 1$ **.**

		ML	Bayes (MCMC)					
			BSEL	BLINEX				
				a=-5	a=-2	a=2	a=3	a=5
r = 4								
$\hat{\alpha}$	AV	2.8380	2.3801	3.4222	2.8019	2.0867	1.9718	1.7850
	ER	1.9716	0.7466	3.7854	1.6622	0.5207	0.5073	0.5719
$\hat{\theta}$	AV	3.9716	3.8846	9.4898	7.6825	2.3626	2.0487	1.6599
	ER	28.911	8.3031	80.014	55.338	0.5931	0.3101	0.3305
$\hat{S}(t)$	AV	0.7176	0.7476	0.7863	0.7645	0.7286	0.7183	0.6961
	ER	0.0342	0.0284	0.0386	0.0325	0.0244	0.0225	0.0189
$\hat{h}(t)$	AV	1.6884	1.2319	2.8975	1.8972	0.9457	0.8563	0.7283
	ER	1.2017	0.4473	3.8094	1.0187	0.7352	0.8723	1.1028
r = 6								
$\hat{\alpha}$	AV	2.4601	2.1001	2.9936	2.4338	1.8764	1.7882	1.6426
	ER	0.9212	0.3993	2.0472	0.7049	0.4072	0.4512	0.5713
$\hat{\theta}$	AV	2.9732	3.3209	7.5914	5.8538	2.3368	2.0750	1.7280
	ER	3.1884	2.6746	35.726	19.022	0.3679	0.1895	0.2115
$\hat{S}(t)$	AV	0.6971	0.7308	0.7651	0.7455	0.7148	0.7063	0.6883
	ER	0.0271	0.0218	0.0299	0.0250	0.0187	0.0172	0.0145
$\hat{h}(t)$	AV	1.6101	1.2170	2.5970	1.7387	0.9686	0.8869	0.7662
	ER	0.8350	0.4108	2.6417	0.6160	0.6720	0.7960	1.0090
r = 8								
$\hat{\alpha}$	AV	2.4019	1.9970	2.9249	2.3365	1.7871	1.7073	1.5772
	ER	0.7086	0.2571	1.6359	0.4423	0.3595	0.4316	0.5711
$\hat{\theta}$	AV	2.5921	3.0268	6.4532	4.8573	2.2662	2.0443	1.7375
	ER	1.5094	1.5220	22.168	10.029	0.2843	0.1762	0.2106
$\hat{S}(t)$	AV	0.6586	0.7095	0.7422	0.7233	0.6947	0.6871	0.6711
	ER	0.0253	0.0169	0.0232	0.0193	0.0146	0.0136	0.0118
$\hat{h}(t)$	AV	1.7269	1.2562	2.6381	1.7776	1.0097	0.9285	0.8083
	ER	0.8145	0.3547	2.5858	0.6119	0.5992	0.7170	0.9211

جدول (٣-٢٠): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة لمعلمتي التوزيع α,θ ولـ دالتي الـصلاحية ومعدل التعطل اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $t=1$, $\alpha=2,\ \theta=1.5,\ \omega=0.5$.

		ML	Bayes (MCMC)					
			BSEL	BLINEX				
				a=-5	a=-2	a=2	a=3	a=5
r = 4								
$\hat{\alpha}$	AV	1.9256	2.7119	4.0649	3.4081	1.9720	1.7487	1.4615
	ER	0.6690	1.5911	11.195	5.7319	0.6665	1.0363	1.6162
$\hat{\theta}$	AV	2.6719	1.9991	4.3990	3.3927	1.3412	1.1740	0.9598
	ER	2.8581	1.0348	10.909	5.7693	0.2555	0.2616	0.3825
$\hat{S}(t)$	AV	0.6663	0.5350	0.6008	0.5621	0.5073	0.4935	0.6665
	ER	0.0507	0.0201	0.0270	0.0223	0.0187	0.0184	0.0183
$\hat{h}(t)$	AV	1.3057	2.2488	4.4759	3.5082	1.4591	1.2195	0.9225
	ER	0.6646	1.2363	18.326	9.6435	0.2530	0.5112	1.0792
r = 6								
$\hat{\alpha}$	AV	1.8222	2.5891	3.6736	3.0842	2.1871	2.0313	1.7809
	ER	0.3937	0.9741	5.9998	2.7628	0.3367	0.2728	0.3332
$\hat{\theta}$	AV	2.4947	1.8428	3.7235	2.8285	1.3577	1.2246	1.0431
	ER	1.9088	0.6628	7.0695	3.4324	0.2029	0.2080	0.2924
$\hat{S}(t)$	AV	0.6536	0.5218	0.5753	0.5435	0.5002	0.4895	0.3367
	ER	0.0409	0.0145	0.0192	0.0159	1.0137	0.0136	0.0137
$\hat{h}(t)$	AV	1.2746	2.2002	3.9466	3.0786	1.6301	1.4587	1.2201
	ER	0.5039	0.7778	9.6502	4.2678	0.1672	0.1957	0.3665
r = 8								
$\hat{\alpha}$	AV	1.7567	2.5043	3.6666	3.0497	2.1055	1.9627	1.7485
	ER	0.2848	0.6667	5.9916	2.6172	0.1974	0.1789	0.2498
$\hat{\theta}$	AV	2.2813	1.6674	3.3150	2.4620	1.3086	1.2009	1.0469
	ER	1.5837	0.4010	4.6137	1.9081	0.2028	0.2050	0.2874
$\hat{S}(t)$	AV	0.6221	0.4971	0.5450	0.5160	0.4788	0.4700	0.1974
	ER	0.0307	0.0111	0.0126	0.0112	0.0115	0.0118	0.0128
$\hat{h}(t)$	AV	1.3083	2.2202	4.0285	3.1365	1.6511	1.4826	1.2559
	ER	0.4545	0.7025	9.575	4.1651	0.1202	0.1554	0.3154

جدول (٣-٢١): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة لمعلمتي التوزيع α,θ ولـ دالتي الـصلاحية ومعدل التعطل اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\alpha = 1.5,\ \theta = 2.5,\ \omega = 0.5\ ,t = 1$ **.**

		ML	Bayes (MCMC)					
			BSEL	BLINEX				
				a=-5	a=-2	a=2	a=3	a=5
r = 4								
$\hat{\alpha}$	AV	1.1265	1.6398	1.6696	1.6517	1.6278	1.6219	1.6099
	ER	0.2071	0.1436	0.1593	0.1496	0.1381	0.1354	0.1304
$\hat{\theta}$	AV	6.8932	3.8951	7.4158	6.3443	2.2835	1.9746	1.6139
	ER	235.20	5.5756	34.767	24.819	1.0292	1.0923	1.4786
$\hat{S}(t)$	AV	0.8557	0.7346	0.7789	0.7544	0.7117	0.6990	0.1381
	ER	0.0407	0.0214	0.0240	0.0222	0.0211	0.0213	0.0223
$\hat{h}(t)$	AV	0.3956	0.8649	1.1964	0.9977	0.7591	0.7161	0.6459
	ER	0.4260	0.1134	0.1407	0.0949	0.1502	0.1701	0.2091
r = 6								
$\hat{\alpha}$	AV	1.0866	1.6070	1.6349	1.6181	1.5956	1.5902	1.5791
	ER	0.2007	0.0958	0.1074	0.1002	0.0918	0.0899	0.0864
$\hat{\theta}$	AV	4.6575	3.2677	5.9208	4.9073	2.2249	1.9629	1.6357
	ER	8.1789	2.4452	16.794	10.425	0.5993	0.6685	1.0181
$\hat{S}(t)$	AV	0.8460	0.7091	0.7464	0.7252	0.6913	0.6818	0.0918
	ER	0.0358	0.0146	0.0157	0.0148	0.0148	0.0152	0.0163
$\hat{h}(t)$	AV	0.4276	0.9496	1.1901	1.0458	0.8633	0.8251	0.7589
	ER	0.3770	0.0731	0.0942	0.0767	0.0851	0.0950	0.1190
r = 8								
$\hat{\alpha}$	AV	1.0630	1.5727	1.6000	1.5836	1.5619	1.5564	1.5456
	ER	0.2272	0.0813	0.0921	0.0853	0.0776	0.0759	0.0727
$\hat{\theta}$	AV	4.3693	3.0516	5.2833	4.3305	2.2744	2.0488	1.7494
	ER	5.3112	1.3266	11.229	6.3146	0.4197	0.4704	0.7462
$\hat{S}(t)$	AV	0.8417	0.7044	0.7344	0.7171	0.6906	0.6833	0.0776
	ER	0.0318	0.0112	0.0121	0.0114	0.0112	0.0114	0.0119
$\hat{h}(t)$	AV	0.4418	0.9632	1.1491	1.0373	0.8942	0.8626	0.8055
	ER	0.3554	0.0620	0.0920	0.0653	0.0693	0.0760	0.0929

(٣-٨) التعليق على النتائج Comments on the Results

اعتمادا على عينة من الإحصاءات المرتبة المعممة تم في هذا الفصل الحصول علـى مقدرات معلمتي التوزيع ودالتي الصلاحية ومعدل التعطل باستخدام طريقة الإمكـان الأكبـر وطرق بييز باستخدام أكثر من شكل من أشكال التوزيعات القبلية واعتمادا على دوال خسارة متماثلة وغير متماثلة وتم تطبيق النتائج التي تم التوصل إليها على مجموعة مـن البيانـات الحقيقية وتم اختبار دقة النتائج باستخدام دراسة المحاكاة اعتمادا على عدد كبير من العينـات وتوصلنا من خلال ذلك إلى النتائج والتوصيات التالية:

١- أدركنا من خلال استخدامنا لنموذج الإحصاءات المرتبة المعممة أهمية هـذا النموذج إذ تمكنا من تخصيص جميع نتائج هذا الفصل بسهولة إلى النتـائج الخاصة بالعينات المراقبة تتابعيا والتي تحوي كحـالات خاصـة (العينـة المراقبة من النوع الثاني وعينة الإحصاءات المرتبة العادية) كمـا حـصلنا على النتائج الخاصة بالقيم المسجلة الدنيا ويمكن الحـصول علـى النتـائج الخاصة بجميع العينات التي يمكن تخصيصها مـن نمـوذج الإحـصاءات المرتبة المعممة والتي تم التطرق لبعض منها في الفصل الثاني.

٢- إن دالة الخسارة المتوازنة دالة معممة يمكن الحصول من خلالها على دوال خسارة متوازنة متماثلة وغير متماثلة مثل دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة ودالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة واللتين يمكن تخصيصهما بـسهولة إلى دالة خسارة مربع الخطأ ودالة الخسارة الخطية الأسية، وعلى ذلك فـإن النتائج التي تم التوصل إليها بالإعتماد على هذا النوع مـن دوال الخـسارة تعتبر نتائج معممة لجميع الدراسات السابقة التي اعتمدت على توزيع وايبل الأسي أو أحد الحالات الخاصة منه واستخدمت فيها دوال الخسارة العاديـة، لذا نوصي باستخدام هذا النوع المعمم من دوال الخسارة والذي يغطي أيضا مشكلة التقدير الأعلى والأدنى علاوة على سهولة الحصول على المقـدرات اعتمادا عليه.

٣- إن الاستدلالات التي حصلنا عليها لتوزيع وايبل الأسي ذي المعلمتين تعتبـر نتائج جديدة و تغطي كل النتائج السابقة التي تناولت هذا التوزيـع أو أحـد الحالات الخاصة منه واعتمادا على أي نوع من أنواع العينـات العـشوائية التي تنتج كحالة خاصة مـن نمـوذج الإحـصاءات المرتبـة المعممـة أو الإحصاءات المرتبة المعممة المقابلة.

٤- تم حل مشكلة الحسابات المعقدة التي تنتج في استدلالات بييز اعتمادا علـى التوزيعات القبلية المعلمة (في حالة عدم معلومية معلمتي التوزيع) باستخدام إحدى طرق سلسلة ماركوف وحصلنا على نتائج جيدة.

٥- عند استخدامنا للتوزيعات القبلية غير المعلمة (في حالة عدم معلومية معلمتي التوزيع) واجهتنا مشكلة في الحصول على بعض النتائج باستخدام التكـاملات المباشرة فلجأنا إلى استخدام إحدى طرق سلسلة ماركوف ولاحظنا أن النتائج

في هذه الحالة لا تتأثر باختيارنا لقيمة c وهو الحد الأعلى لفتـرة التوزيـع القبلي غير المعلم المنتظم للمعلمة α.

٦- بمقارنة النتائج العددية المختلفة يتضح من الجداول أن قـيم مخـاطرة بييـز لتقديرات بييز أصغر في معظم الحالات من تلك التي تقابلها لتقديرات الإمكـان الأكبر وذلك لقيم α,θ المختلفة ولدالتي الصلاحية ومعدل التعطـل $S(t),h(t)$ اعتمادا على دوال الخسارة المختلفة، أيضا تقل قيم مخاطرة بييـز للتقـديرات المختلفة بزيادة حجم العينات وبالتالي فإن أداء طرق بييز يعطي نتائج أفـضل من طريقة الإمكان الأكبر وتزداد كفاءة المقدرات بزيادة حجم العينات.

٧- كل الحسابات الواردة في هذا الباب تم انجازها باستخدام برنامج الماثيماتيكـا الإصدار السابع (Mathematica ver. 7).

نتائج هذا الفصل تعتبر جديدة في مجال استدلالات بييز لتوزيع وايبل الأسي والمعتمدة علـى الإحصاءات المرتبة المعممة، والجدير بالذكر أن جزءا من نتائج هذا الفصل تم نـشره فـي المجلات الإحصائية الأمريكية التالية:

1. Bayesian estimation for the exponentiated Weibull model via Markov chain Monte Carlo simulation. ***Communications in Statistics: Simulation and Computation***, 40, 532–543, (2011).

2. Bayesian estimation based on dual generalized order statistics from the exponentiated Weibull Model. ***Journal of Statistical Theory and Applications***, accepted and to appear, (2011).

تقدير بعض نماذج الإجهاد - القوة لتوزيع وايبل الأسي

Estimation of Some Stress – Strength Models for the Exponentiated Weibull Distribution

(٤-١) مقدمـة Introduction

يتناول هذا الفصل تقدير دالة الموثوقية لنموذجي الإجهـاد - القـوة $S_1 = P(Y < X)$ و $S_2 = P(X < Y < Z)$ من توزيع وايبل الأسي اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممـة وذلك باستخدام طريقة الإمكان الأكبر وطرق بييز باستخدام دالـة خـسارة مربـع الخطـأ المتوازنة ودالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة، كذلك سيتم حساب التقـديرات باسـتخدام طرق سلسلة ماركوف وسوف تخصص النتائج إلى العينات المراقبة تتابعيا من النوع الثـاني والقيم المسجلة الدنيا، أيضا سيتم التأكد من دقة النتائج التي تم الحـصول عليهـا باسـتخدام محاكاة مونت كارلو.

(٤-٢) تقدير النموذج $S_1 = P(Y < X)$

Estimation of the Model $S_1 = P(Y < X)$

يركزهذا الجزء على تقديرالنموذج S_1 باستخدام طريقة الإمكان الأكبروطرق بييز كما يلي:

بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان مـستقلان يتبعـان توزيـع وايبـل الأسـي $X \sim EW(\alpha_1, \theta_1)$ و $Y \sim EW(\alpha_2, \theta_2)$ فإنه يمكن حساب النموذج S_1 كالتالي:

$$
\begin{aligned}
S_1 = P(Y < X) &= E\left[P(Y < X \mid X)\right], \\
&= E\left[\int_0^x f_Y(y)\,dy\right], \\
&= \int_0^\infty F_Y(x) f_X(x)\,dx, \qquad (4.1) \\
&= \int_0^\infty \alpha_1 \theta_1 x^{\alpha_1-1} e^{-x^{\alpha_1}} (1-e^{-x^{\alpha_1}})^{\theta_1-1} (1-e^{-x^{\alpha_2}})^{\theta_2}\,dx, \\
&= \alpha_1\theta_1 \int_0^\infty x^{\alpha_1-1} e^{-x^{\alpha_1}} (1-e^{-x^{\alpha_1}})^{\theta_1-1} (1-e^{-x^{\alpha_2}})^{\theta_2}\,dx.
\end{aligned}
$$

فيما يلي سيتم تقديرالنموذج S_1 باستخدام طريقة الإمكان الأكبـر وطـرق بيبـز للمعلمتـين α_1,α_2 في حالتين:

١- التقدير عندما $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ وتكون معلومة.

٢- التقدير عندما $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

(٤-٢-١) التقدير عندما تكون $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ وتكون معلومة

Estimation when $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ and α is known

سوف نعتبر الحالة الأولى التي تتساوى فيها المعلمتان α_1,α_2 ولـتكن $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ وتكون معلومة، في هذه الحالة تصبح قيمة S_1 في الصورة التالية:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \alpha\theta_1 \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x^{\alpha}} (1-e^{-x^{\alpha}})^{\theta_1-1} (1-e^{-x^{\alpha}})^{\theta_2}\,dx, \\
&= \frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2} (1-e^{-x^{\alpha}})^{\theta_1+\theta_2}\Big|_0^\infty, \qquad (4.2) \\
&= \frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}.
\end{aligned}
$$

(٤-٢-١-١) تقدير الإمكان الأكبر للنموذج $S_1 = P(Y < X)$

Maximum likelihood estimation of the model $S_1 = P(Y < X)$

بفرض أن $X(1,n_1,\tilde{m},k),...,X(r_1,n_1,\tilde{m},k)$ هي أول r_1 إحصاء مرتب معمم مـن توزيع وايبل الأسي $EW(\alpha,\theta_1)$، نحصل على معادلة الإمكان للمعلمة θ_1 من العلاقـة (3.5) على النحو الآتي:

$$
\frac{r_1}{\hat{\theta}_{1_{ML}}} + \sum_{i=1}^{r_1-1} \frac{m_i u^{\hat{\theta}_{1_{ML}}}(x_i)\ln u(x_i)}{1-u^{\hat{\theta}_{1_{ML}}}(x_i)} + \sum_{i=1}^{r_1} \ln u(x_i) + \frac{(\gamma_{r_1}-1)u^{\hat{\theta}_{1_{ML}}}(x_{r_1})\ln u(x_{r_1})}{1-u^{\hat{\theta}_{1_{ML}}}(x_{r_1})} = 0, \qquad (4.3)
$$

وينتج مقدر الإمكان الأكبر $\hat{\theta}_{1_{ML}}$ من حل المعادلة غير الخطية (4.3) بالنسبة إلى θ_1.

بالمثل إذا كانت $Y(1,n_2,\tilde{m},k),...,Y(r_2,n_2,\tilde{m},k)$ هي أول r_2 إحصاء مرتب معمم من توزيع وايبل الأسي $EW(\alpha,\theta_2)$، فإن مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ_2 ول يكن $\hat{\theta}_{2_{ML}}$ يمكن الحصول عليه بحل المعادلة غير الخطية التالية:

$$\frac{r_2}{\hat{\theta}_{2_{ML}}}+\sum_{i=1}^{r_2-1}\frac{m_i u^{\hat{\theta}_{2_{ML}}}(y_i)\ln u(y_i)}{1-u^{\hat{\theta}_{2_{ML}}}(y_i)}+\sum_{i=1}^{r_2}\ln u(y_i)+\frac{(\gamma_{r_2}-1)u^{\hat{\theta}_{2_{ML}}}(y_r)\ln u(y_{r_2})}{1-u^{\hat{\theta}_{2_{ML}}}(y_{r_2})}=0, \quad (4.4)$$

بالتالي فإن مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_1 يكون على الشكل التالي:

$$\hat{S}_{1_{ML}}=\frac{\hat{\theta}_{1_{ML}}}{\hat{\theta}_{1_{ML}}+\hat{\theta}_{2_{ML}}}. \quad (4.5)$$

(٤-٢-١-٢) تقدير بييز للنموذج $S_1=P(Y<X)$

Bayes estimation of the model $S_1=P(Y<X)$

سيتم في هذا البند تقدير النموذج S_1 باستخدام طرق بييز وذلك بافتراض نوعين من التوزيعات القبلية للمعلمة θ وهي توزيع قبلي معلم وآخرغير معلم.

(٤-٢-١-٢-١) تقدير بييز للنموذج $S_1=P(Y<X)$ باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعلمتين $\theta_i, i=1,2$

Bayes estimation of the model $S_1=P(Y<X)$ **using informative prior distributions for** $\theta_i, i=1,2$.

بفرض أن معلمتي الشكل θ_1 وθ_2 مجهولتان وأن التوزيع القبلي لكل منهما هو التوزيع الذي تم اقتراحه في Nassar and Eissa (2004) حيث تتبع المعلمة $\theta_i, i=1,2$ توزيع جاما بالمعلمتين (ν_i,δ_i) والذي يأخذ الشكل التالي:

$$\pi_1(\theta_i)=\frac{\delta_i^{\nu_i}}{\Gamma(\nu_i)}\theta_i^{\nu_i-1}e^{-\delta_i\theta_i};\ \theta_i>0,\ (\nu_i,\delta_i>0),\ i=1,2, \quad (4.6)$$

ونحصل على التوزيع البعدي لكل من θ_1,θ_2 باستخدام العلاقة (3.22) على النحو الآتي:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1^*(\theta_1 \mid \underline{x}) &= k_1^{-1}\theta_1^{r_1+v_1-1} e^{-\delta_1\theta_1}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta_1), \\ \pi_1^*(\theta_2 \mid \underline{y}) &= k_2^{-1}\theta_2^{r_2+v_2-1} e^{-\delta_2\theta_2}\eta(\underline{y};\alpha,\theta_2), \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

حيث $\eta(.;\alpha,\theta)$ تعطى بالمعادلة (3.2) وكذلك

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \int_0^\infty \theta_1^{r_1+v_1-1} e^{-\delta_1\theta_1}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta_1)\,d\theta_1, \\ k_2 &= \int_0^\infty \theta_2^{r_2+v_2-1} e^{-\delta_2\theta_2}\,\eta(\underline{y};\alpha,\theta_2)\,d\theta_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

ولأن θ_1,θ_2 مستقلتان فإن التوزيع البعدي المشترك لهما يمكن كتابته على الصورة:

$$\pi_1^*(\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y}) = \pi_1^*(\theta_1 \mid \underline{x})\,\pi_1^*(\theta_2 \mid \underline{y}), \qquad (4.9)$$

وعليه فإن مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يكون على الصورة:

$$\hat{S}_{1_{BS}} = \omega\hat{S}_{1_{ML}} + (1-\omega)E(S_1 \mid \underline{x},\underline{y}), \qquad (4.10)$$

حيث

$$E(S_1 \mid \underline{x},\underline{y}) = \int_0^\infty\int_0^\infty S_1\,\pi_1^*(\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y})\,d\theta_1\,d\theta_2\,. \qquad (4.11)$$

و $\hat{S}_{1_{ML}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_1 المعطى بالعلاقة (4.5).

أما مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيكون علـى الصورة:

$$\hat{S}_{1_{BL}} = -\frac{1}{a}\ln[\omega e^{-a\hat{S}_{1_{ML}}} + (1-\omega)E(e^{-aS_1} \mid \underline{x},\underline{y})], \qquad (4.12)$$

حيث

$$E(e^{-aS_1} \mid \underline{x},\underline{y}) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-aS_1}\,\pi_1^*(\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y})\,d\theta_1\,d\theta_2. \qquad (4.13)$$

(٤-٢-١-٢-٢) تقدير بييز للنموذج $S_1 = P(Y < X)$ باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعلمتين $\theta_i, i = 1,2$

Bayes estimation of the model $S_1 = P(Y < X)$ using non-informative prior distributions for $\theta_i, i = 1,2$.

عندما تكون معلمتا الشكل θ_1 و θ_2 مجهولتين، فإنه يمكن اعتبار التوزيع القبلـي غيـر المعلم المنتظم على الفترة $(0,\infty)$ لكل منهما في الصورة:

$$\pi_2(\theta_i) \propto \frac{1}{\theta_i}, \qquad \theta_i > 0,\ i = 1,2. \qquad (4.14)$$

وبالتالي فإن التوزيع البعدي لكل من θ_1,θ_2 نحصل عليه من العلاقة (3.33) ويكـون علـى النحو الآتي:

$$\left.\begin{aligned} \pi_2^*(\theta_1 \mid \underline{x}) &= j_1^{-1}\theta_1^{r_1-1}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta_1), \\ \pi_2^*(\theta_2 \mid \underline{y}) &= j_2^{-1}\theta_2^{r_2-1}\eta(\underline{y};\alpha,\theta_2), \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

حيث

$$\left.\begin{aligned} j_1 &= \int_0^\infty \theta_1^{r_1-1}\ \eta(\underline{x};\alpha,\theta_1)\,d\,\theta_1, \\ j_2 &= \int_0^\infty \theta_2^{r_2-1}\ \eta(\underline{y};\alpha,\theta_2)\,d\,\theta_2. \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

وحيث أن θ_1,θ_2 مستقلتان فإن التوزيع البعدي المشترك لهما يمكن كتابته على الصورة:

$$\pi_2^*(\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y}) = \pi_2^*(\theta_1 \mid \underline{x})\,\pi_2^*(\theta_2 \mid \underline{y}), \tag{4.17}$$

وعليه فإن مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنـة نحـصل عليه من العلاقة (4.10) حيث:

$$E\,(S_1 \mid \underline{x},\underline{y}) = \int_0^\infty\int_0^\infty S_1\,\pi_2^*(\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y})\,d\,\theta_1\,d\,\theta_2. \tag{4.18}$$

أما مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فنحصل عليـه من العلاقة (4.12) حيث:

$$E\,(e^{-aS_1} \mid \underline{x},\underline{y}) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-aS_1}\,\pi_2^*(\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y})\,d\,\theta_1\,d\,\theta_2. \tag{4.19}$$

(٤-٢-٢) التقدير عندما $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Estimation when $\alpha_1 \neq \alpha_2$

سوف نعتبر الحالة الثانية التي لا تتساوى فيها المعلمتان α_1,α_2، فـي هـذه الحالـة تكون S_1 على الصورة التي حصلنا عليها في العلاقة (4.1) وفيما يلي سيتم حساب التقديرات المختلفة لهذه الدالة.

(٤-٢-٢-١) تقدير الإمكان الأكبر لـ $S_1 = P(Y < X)$

Maximum likelihood estimation of $S_1 = P(Y < X)$

بفرض أن $X(1,n_1,\tilde{m},k),\ldots,X(r_1,n_1,\tilde{m},k)$ هي أول r_1 إحصاء مرتب معمم مـن توزيع وايبل الأسي $EW(\alpha_1,\theta_1)$، نحصل على معادلتي الإمكان الأكبر للمعلمتين θ_1,α_1 من العلاقتين (3.4) و (3.5) على النحو الآتي:

$$\frac{r_1}{\hat{\alpha}_{1_{ML}}}+\sum_{i=1}^{r_1-1}\frac{m_i\hat{\theta}_{1_{ML}}u^{\hat{\theta}_{1_{ML}}-1}(x_i)x_i^{\hat{\alpha}_{1_{ML}}}e^{-x_i^{\hat{\alpha}_{1_{ML}}}}\ln x_i}{1-u^{\hat{\theta}_{1_{ML}}}(x_i)}$$
$$+\sum_{i=1}^{r_1}\ln x_i\left(1-x_i^{\hat{\alpha}_{1_{ML}}}+\frac{(\hat{\theta}_{1_{ML}}-1)x_i^{\hat{\alpha}_{1_{ML}}}e^{-x_i^{\hat{\alpha}_{1_{ML}}}}}{u(x_i)}\right) \qquad (4.20)$$
$$+\frac{(\gamma_{r_1}-1)\hat{\theta}_{1_{ML}}u^{\hat{\theta}_{1_{ML}}-1}(x_{r_1})x_{r_1}^{\hat{\alpha}_{1_{ML}}}e^{-x_{r_1}^{\hat{\alpha}_{1_{ML}}}}\ln x_{r_1}}{1-u^{\hat{\theta}_{1_{ML}}}(x_{r_1})}=0,$$

$$\frac{r_1}{\hat{\theta}_{1_{ML}}}+\sum_{i=1}^{r_1-1}\frac{m_iu^{\hat{\theta}_{1_{ML}}}(x_i)\ln u(x_i)}{1-u^{\hat{\theta}_{1_{ML}}}(x_i)}+\sum_{i=1}^{r_1}\ln u(x_i)+\frac{(\gamma_{r_1}-1)u^{\hat{\theta}_{1_{ML}}}(x_{r_1})\ln u(x_{r_1})}{1-u^{\hat{\theta}_{1_{ML}}}(x_{r_1})}=0, \qquad (4.21)$$

ونحصل على مقدري الإمكان الأكبر $\hat{\theta}_{1_{ML}},\hat{\alpha}_{1_{ML}}$ من حل المعادلتين (4.20)،(4.21) بالنسبة إلى θ_1،α_1 على التوالي.

بالمثل إذا كانت $Y(1,n_2,\tilde{m},k),...,Y(r_2,n_2,\tilde{m},k)$ هي أول r_2 إحصاء مرتب معمم من توزيع وايبل الأسي $EW(\alpha_2,\theta_2)$، نحصل على معادلتي الإمكـان الأكبـر للمعلمتـين α_2,θ_2 من العلاقتين (3.4) و (3.5) على النحو الآتي:

$$\frac{r_2}{\hat{\alpha}_{2_{ML}}}+\sum_{i=1}^{r_2-1}\frac{m_i\hat{\theta}_{2_{ML}}u^{\hat{\theta}_{2_{ML}}-1}(y_i)y_i^{\hat{\alpha}_{2_{ML}}}e^{-y_i^{\hat{\alpha}_{2_{ML}}}}\ln y_i}{1-u^{\hat{\theta}_{2_{ML}}}(y_i)}$$
$$+\sum_{i=1}^{r_2}\ln y_i\left(1-y_i^{\hat{\alpha}_{2_{ML}}}+\frac{(\hat{\theta}_{2_{ML}}-1)y_i^{\hat{\alpha}_{2_{ML}}}e^{-y_i^{\hat{\alpha}_{2_{ML}}}}}{u(y_i)}\right) \qquad (4.22)$$
$$+\frac{(\gamma_{r_2}-1)\hat{\theta}_{2_{ML}}u^{\hat{\theta}_{2_{ML}}-1}(y_{r_2})y_{r_2}^{\hat{\alpha}_{2_{ML}}}e^{-y_{r_2}^{\hat{\alpha}_{2_{ML}}}}\ln y_{r_2}}{1-u^{\hat{\theta}_{2_{ML}}}(y_{r_2})}=0,$$

$$\frac{r_2}{\hat{\theta}_{2_{ML}}}+\sum_{i=1}^{r_2-1}\frac{m_iu^{\hat{\theta}_{2_{ML}}}(y_i)\ln u(y_i)}{1-u^{\hat{\theta}_{2_{ML}}}(y_i)}+\sum_{i=1}^{r_2}\ln u(y_i)+\frac{(\gamma_{r_2}-1)u^{\hat{\theta}_{2_{ML}}}(y_{r_2})\ln u(y_{r_2})}{1-u^{\hat{\theta}_{2_{ML}}}(y_{r_2})}=0, \qquad (4.23)$$

ونحصل على مقدري الإمكان الأكبر $\hat{\theta}_{2_{ML}},\hat{\alpha}_{2_{ML}}$ من حل المعادلتين (4.22)،(4.23) بالنـسبة إلى θ_2,α_2 على التوالي.

بالتالي فإن مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_1 نحصل عليه من المعادلة (4.1) بعد التعـويض عن قيم المعالم $\alpha_1,\theta_1,\alpha_2,\theta_2$ بمقدرات الإمكان الأكبر لها $\hat{\alpha}_{1_{ML}},\hat{\theta}_{1_{ML}},\hat{\alpha}_{2_{ML}}\hat{\theta}_{2_{ML}}$ فيكون على الصورة:

$$\hat{S}_{1_{ML}} = \hat{\alpha}_{1_{ML}} \hat{\theta}_{1_{ML}} \int_0^\infty x^{\hat{\alpha}_{1_{ML}}-1} e^{-x^{\hat{\alpha}_{1_{ML}}}} (1-e^{-x^{\hat{\alpha}_{1_{ML}}}})^{\hat{\theta}_{1_{ML}}-1} (1-e^{-x^{\hat{\alpha}_{2_{ML}}}})^{\hat{\theta}_{2_{ML}}} dx . \qquad (4.24)$$

(٤-٢-٢-٢) تقدير بييز للنموذج $S_1 = P(Y < X)$

Bayes estimation of the model $S_1 = P(Y < X)$

سيتم في هذا البند تقدير النموذج S_1 باستخدام طرق بييز وذلك بافتراض توزيعات قبليـة معلمة وأخرى غير معلمة للمعالم $(\alpha_i, \theta_i), i = 1,2$.

(٤-٢-٢-٢-١) تقدير بييز للنموذج $S_1 = P(Y < X)$ باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعالم $(\alpha_i, \theta_i), i = 1,2$

Bayes estimation of the model $S_1 = P(Y < X)$ **using informative prior distributions for** $(\alpha_i, \theta_i), i = 1,2$.

بفرض أن المعالم $(\alpha_i, \theta_i), i = 1,2$ مجهولة والتوزيع القبلي لكل منها هو التوزيع الـذي تم اقتراحه في Nassar and Eissa (2004) وفيه كان التوزيع المشروط للمعلمة $\theta_i, i = 1,2$ بشرط معلومية المعلمة α_i هو توزيع جاما بالمعلمتين $(v_i, \frac{1}{\alpha_i})$ في حين تم تعديل التوزيع القبلي للمعلمة $\alpha_i, i = 1,2$ ليكون توزيع جاما بالمعلمتين $(d_i, \frac{1}{b_i})$ بدلا من التوزيع الأسـي، أي أن:

$$\pi(\theta_i \mid \alpha_i) = \frac{\alpha_i^{-v_i}}{\Gamma(v_i)} \theta_i^{v_i - 1} e^{-\theta_i/\alpha_i}, \; i = 1,2, \quad \alpha_i, \theta_i > 0, i = 1,2, \qquad (4.25)$$

$$\pi(\alpha_i) = \frac{b_i^{-d_i}}{\Gamma(d_i)} \alpha_i^{d_i - 1} e^{-\alpha_i/b_i}, \; \alpha_i > 0, i = 1,2. \qquad (4.26)$$

بالتالي فإن التوزيع البعدي المشترك للمعلمتين $(\alpha_i, \theta_i), i = 1,2$ نحصل عليه مـن العلاقـة (3.44) على النحو الآتي:

$$\left.\begin{aligned} \pi_3^*(\alpha_1, \theta_1 \mid \underline{x}) &= k_1^{*^{-1}} \alpha_1^{r_1 + d_1 - v_1 - 1} \theta_1^{r_1 + v_1 - 1} e^{-(\alpha_1^2 + b_1\theta_1)/b_1\alpha_1} \eta(\underline{x}; \alpha_1, \theta_1), \\ \pi_3^*(\alpha_2, \theta_2 \mid \underline{y}) &= k_2^{*^{-1}} \alpha_2^{r_2 + d_2 - v_2 - 1} \theta_2^{r_2 + v_2 - 1} e^{-(\alpha_2^2 + b_2\theta_2)/b_2\alpha_2} \eta(\underline{y}; \alpha_2, \theta_2), \end{aligned}\right\} \qquad (4.27)$$

حيث

$$\left.\begin{aligned} k_1^* &= \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha_1^{r_1 + d_1 - v_1 - 1} \theta_1^{r_1 + v_1 - 1} e^{-(\alpha_1^2 + b_1\theta_1)/b_1\alpha_1} \eta(\underline{x}; \alpha_1, \theta_1) \, d\alpha_1 \, d\theta_1, \\ k_2^* &= \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha_2^{r_2 + d_2 - v_2 - 1} \theta_2^{r_2 + v_2 - 1} e^{-(\alpha_2^2 + b_2\theta_2)/b_2\alpha_2} \eta(\underline{y}; \alpha_2, \theta_2) \, d\alpha_2 \, d\theta_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4.28)$$

وحيث أن المعالم $(\alpha_1,\theta_1), (\alpha_2,\theta_2)$ مستقلة فإن التوزيع البعدي المشترك لها يمكـن كتابتـه على الصورة:

$$\pi_3^*(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2\,|\,\underline{x},\underline{y}) = \pi_3^*(\alpha_1,\theta_1\,|\,\underline{x})\,\pi_3^*(\alpha_2,\theta_2\,|\,\underline{y}), \qquad (4.29)$$

وعليه فإن مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يعطى من العلاقة (4.10) حيث:

$$E(S_1\,|\,\underline{x},\underline{y}) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty S_1\,\pi_3^*(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2\,|\,\underline{x},\underline{y})\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\theta_1\,d\theta_2. \qquad (4.30)$$

أما مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيعطـى مـن العلاقة (4.12) حيث:

$$E(e^{-aS_1}\,|\,\underline{x},\underline{y}) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-aS_1}\,\pi_3^*(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2\,|\,\underline{x},\underline{y})\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\theta_1\,d\theta_2. \qquad (4.31)$$

(٤-٢-٢-٢-٢) تقدير بييز لـ $S_1 = P(Y < X)$ باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعالم $(\alpha_i,\theta_i), i = 1,2$

Bayes estimation of $S_1 = P(Y < X)$ using non - informative prior distributions for $(\alpha_i,\theta_i), i = 1,2$.

بفرض أن المعالم $(\alpha_i,\theta_i), i = 1,2$ مجهولة والتوزيع القبلي لكل منها هو توزيع قبلي غير معلم منتظم كما هو معطى بالعلاقتين (3.54) و (3.55) والذي استخدم في Singh, Gupta and Upadhyay (2005a,b):

$$\pi(\alpha_i) = \frac{1}{c_i}, \qquad 0 < \alpha_i < c_i,\ i = 1,2, \qquad (4.32)$$

$$\pi(\theta_i) \propto \frac{1}{\theta_i}, \qquad \theta_i > 0,\ i = 1,2. \qquad (4.33)$$

بالتالي فإن التوزيع البعدي المشترك للمعلمتين $(\alpha_i,\theta_i), i = 1,2$ نحصل عليه مـن العلاقـة (3.56) على النحو الآتي:

$$\left.\begin{aligned} \pi_4^*(\alpha_1,\theta_1\,|\,\underline{x}) &= j_1^{*^{-1}}\,\alpha_1^{r_1}\theta_1^{r_1-1}\,\eta(\underline{x};\alpha_1,\theta_1), \\ \pi_4^*(\alpha_2,\theta_2\,|\,\underline{y}) &= j_2^{*^{-1}}\,\alpha_2^{r_2}\theta_2^{r_2-1}\,\eta(\underline{y};\alpha_2,\theta_2), \end{aligned}\right\} \qquad (4.34)$$

حيث

$$\left.\begin{aligned} j_1^* &= \int_0^\infty \int_0^{c_1} \alpha_1^{r_1} \theta_1^{r_1 - 1}\, \eta(\underline{x}; \alpha_1, \theta_1)\, d\alpha_1\, d\theta_1, \\ j_2^* &= \int_0^\infty \int_0^{c_2} \alpha_2^{r_2} \theta_2^{r_2 - 1}\, \eta(\underline{y}; \alpha_2, \theta_2)\, d\alpha_2\, d\theta_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4.35)$$

وحيث أن المعالم $(\alpha_1,\theta_1), (\alpha_2,\theta_2)$ مستقلة فإن التوزيع البعدي المشترك لها يمكن كتابته على الصورة:

$$\pi_4^*(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y}) = \pi_4^*(\alpha_1,\theta_1 \mid \underline{x})\, \pi_4^*(\alpha_2,\theta_2 \mid \underline{y})\,, \qquad (4.36)$$

وعليه فإن مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة نحصل عليه من العلاقة (4.10) حيث:

$$E(S_1 \mid \underline{x},\underline{y}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{c_2} \int_0^{c_1} S_1\, \pi_4^*(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y})\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2. \qquad (4.37)$$

أما مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فنحصل عليه من العلاقة (4.12) حيث:

$$E(e^{-aS_1} \mid \underline{x},\underline{y}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{c_2} \int_0^{c_1} e^{-aS_1}\, \pi_4^*(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y})\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2. \qquad (4.38)$$

(٤-٣) تقدير النموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$

Estimation of the Model $S_2 = P(X < Y < Z)$

سيتم في هذا البند حساب مقدر الإمكان الأكبر ومقدرات بييز المختلفة للنموذج S_2 بافتراض حالتين للمعالم $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ كما يلي:

١- التقدير عندما $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ وتكون معلومة.

٢- التقدير عندما $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$.

بفرض أن X و Z متغيرا إجهاد عشوائيان مستقلان يتبعان توزيع وايبل الأسي $EW(\alpha_1,\theta_1)$ و $EW(\alpha_3,\theta_3)$ بدالتي توزيع تراكميتين $H_X(x)$ و $G_Z(z)$ على التوالي، وبفرض أن Y متغير عشوائي مستقل عن X و Z يمثل متغير القوة ويتبع توزيع وايبل الأسي $EW(\alpha_2,\theta_2)$ وله دالة التوزيع التراكمية $F_Y(y)$ فإنه يمكننا تعريف نموذج الإجهاد – القوة S_2 على النحو التالي:

$$S_2=P(X<Y<Z)=\int_0^{\infty}H_X(y)dF_Y(y)-\int_0^{\infty}H_X(y)G_Z(y)dF_Y(y)$$

$$=\alpha_2\theta_2[\int_0^{\infty}y^{\alpha_2-1}e^{-y^{\alpha_2}}(1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1}(1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1}dy \qquad (4.39)$$

$$-\int_0^{\infty}y^{\alpha_2-1}e^{-y^{\alpha_2}}(1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1}(1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1}(1-e^{-y^{\alpha_3}})^{\theta_3}dy\ ].$$

(٤-٣-١) التقدير عندما تكون $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$ وتكون معلومة

Estimation when $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$ and α is known

في الحالة التي تتساوى فيها المعالم $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ وتكون معلومة، فإنه يمكننا حساب النموذج $S_2=P(X<Y<Z)$ على النحو التالي:

$$S_2=\alpha\theta_2[\int_0^{\infty}y^{\alpha-1}e^{-y^{\alpha}}(1-e^{-y^{\alpha}})^{\theta_1+\theta_2-1}dy$$

$$-\int_0^{\infty}y^{\alpha-1}e^{-y^{\alpha}}(1-e^{-y^{\alpha}})^{\theta_1+\theta_2+\theta_3-1}dy\ ],$$

$$=\theta_2\left[\frac{(1-e^{-y^{\alpha}})^{\theta_1+\theta_2}}{\theta_1+\theta_2}\Bigg|_0^{\infty}-\frac{(1-e^{-y^{\alpha}})^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}}{\theta_1+\theta_2+\theta_3}\Bigg|_0^{\infty}\right], \qquad (4.40)$$

$$=\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}-\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2+\theta_3}.$$

(٤-٣-١-١) تقدير الإمكان الأكبر للنموذج $S_2=P(X<Y<Z)$

Maximum likelihood estimation of the model $S_2=P(X<Y<Z)$

بفرض أن $X(1,n_1,\tilde{m},k),...,X(r_1,n_1,\tilde{m},k)$ هي أول r_1 إحصاء مرتب معمم من توزيع وايبل الأسي $EW(\alpha,\theta_1)$ وكذلك $Y(1,n_2,\tilde{m},k),...,Y(r_2,n_2,\tilde{m},k)$ هي أول r_2 إحصاء مرتب معمم من توزيع وايبل الأسي $EW(\alpha,\theta_2)$ فإن مقدري الإمكان الأكبر للمعلمتين θ_1,θ_2 ولتكن $\hat{\theta}_{1_{ML}},\hat{\theta}_{2_{ML}}$ هي بالفعل التي سبق الحصول عليها بحل المعادلتين غير الخطيتين (4.3)،(4.4) على التوالي.

أما إذا كانت $Z(1,n_3,\tilde{m},k),...,Z(r_3,n_3,\tilde{m},k)$ هي أول r_3 إحصاء مرتب معمم من توزيع وايبل الأسي $EW(\alpha,\theta_3)$، فإن مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة θ_3 وليكن $\hat{\theta}_{3_{ML}}$ يمكن الحصول عليه بحل المعادلة غير الخطية التالية:

$$\frac{r_3}{\hat{\theta}_{3_{ML}}}+\sum_{i=1}^{r_3-1}\frac{m_i u^{\hat{\theta}_{3_{ML}}}(z_i)\ln u(z_i)}{1-u^{\hat{\theta}_{3_{ML}}}(z_i)}+\sum_{i=1}^{r_3}\ln u(z_i)+\frac{(\gamma_{r_3}-1)u^{\hat{\theta}_{3_{ML}}}(z_{r_3})\ln u(z_{r_3})}{1-u^{\hat{\theta}_{3_{ML}}}(z_{r_3})}=0, \quad (4.41)$$

بالتعويض في (4.40) عن $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ بمقدرات الإمكان الأكبر $(\hat{\theta}_{1_{ML}},\hat{\theta}_{2_{ML}},\hat{\theta}_{3_{ML}})$ نحـصل على مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_2 في الشكل التالي:

$$\hat{S}_{2_{ML}}=\frac{\hat{\theta}_{2_{ML}}}{\hat{\theta}_{1_{ML}}+\hat{\theta}_{2_{ML}}}-\frac{\hat{\theta}_{2_{ML}}}{\hat{\theta}_{1_{ML}}+\hat{\theta}_{2_{ML}}+\hat{\theta}_{3_{ML}}}. \quad (4.42)$$

(٤-٣-١-٢) تقدير بييز للنموذج $S_2=P(X<Y<Z)$

Bayes estimation of the model $S_2=P(X<Y<Z)$

سيتم في هذا البند تقدير نموذج الإجهاد – القوة S_2 باستخدام طرق بييز وذلك باعتبار توزيعات قبلية معلمة وأخرى غير معلمة للمعالم $\theta_i,\ i=1,2,3$.

(٤-٣-١-٢-١) تقدير بييز للنموذج $S_2=P(X<Y<Z)$ باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعالم $\theta_i,\ i=1,2,3$

Bayes estimation of $S_2=P(X<Y<Z)$ using informative prior distributions for $\theta_i,\ i=1,2,3$.

بفرض أن معالم الشكل $\theta_i,\ i=1,2,3$ مجهولة ولكنها متغيرات عشوائية والتوزيـع القبلي لكل منها هو توزيع جاما بالمعالم (ν_i,δ_i) والذي تم اقتراحه في Nassar and Eissa (2004) والمعطى بالعلاقة (4.6)، فإن التوزيع البعدي للمعلمتين θ_1,θ_2 سبق الحصول عليـه في العلاقة (4.7) أما التوزيع البعدي للمعلمة θ_3 فنحصل عليه بالمثل من العلاقتـين (3.22), (4.7) ويمكن أن يكتب في الصورة التالية:

$$\pi_1^*(\theta_3\,|\,\underline{z})=k_3^{-1}\theta_3^{r_3+\nu_3-1}e^{-\delta_3\theta_3}\eta(\underline{z};\alpha,\theta_3), \quad (4.43)$$

حيث

$$k_3=\int_0^\infty \theta_3^{r_3+\nu_3-1}e^{-\delta_3\theta_3}\eta(\underline{z};\alpha,\theta_3)\,d\theta_3. \quad (4.44)$$

وحيث أن $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ مستقلة فإن التوزيع البعدي المشترك لها يمكن كتابته على الصورة:

$$\pi_1^*(\theta_1,\theta_2,\theta_3\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z})=\pi_1^*(\theta_1\,|\,\underline{x})\,\pi_1^*(\theta_2\,|\,\underline{y})\,\pi_1^*(\theta_3\,|\,\underline{z}), \quad (4.45)$$

وعليه فإن مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يكون على الصورة:

$$\hat{S}_{2_{BS}} = \omega \hat{S}_{2_{ML}} + (1-\omega) E(S_2 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}), \tag{4.46}$$

حيث

$$E(S_2 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty S_2 \, \pi_1^*(\theta_1, \theta_2, \theta_3 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \tag{4.47}$$

أما مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيكون على الصورة:

$$\hat{S}_{2_{BL}} = -\frac{1}{a} \ln[\omega e^{-a\hat{S}_{2_{ML}}} + (1-\omega) E(e^{-aS_2} \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})], \tag{4.48}$$

حيث

$$E(e^{-aS_2} \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-aS_2} \, \pi_1^*(\theta_1, \theta_2, \theta_3 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \tag{4.49}$$

(٤-٣-١-٢-٢) تقدير بييز للنموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$ باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعالم $\theta_i, \ i = 1,2,3$

Bayes estimation of the model $S_2 = P(X < Y < Z)$ using non - informative prior distributions for $\theta_i, \ i = 1,2,3$

بفرض أن معالم الشكل $\theta_i, \ i = 1,2,3$ مجهولة ولكنها متغيرات عشوائية والتوزيع القبلي لكل منها هو توزيع قبلي غير معلم منتظم على الفترة $[0, \infty)$ و يأخذ الصورة التالية:

$$\pi_2(\theta_i) \propto \frac{1}{\theta_i}, \qquad \theta_i > 0, \ i = 1,2,3. \tag{4.50}$$

بالتالي فإن التوزيع البعدي للمعلمتين θ_1, θ_2 سبق الحصول عليه في العلاقة (4.15)، أما التوزيع القبلي للمعلمة θ_3 فنحصل عليه بالمثل من العلاقتين (4.15)،(3.33) على النحو الآتي:

$$\pi_2^*(\theta_3 \mid \underline{z}) = j_3^{-1} \theta_3^{r_3 - 1} \eta(\underline{z}; \alpha, \theta_3), \tag{4.51}$$

حيث

$$j_3 = \int_0^\infty \theta_3^{r_3 - 1} \eta(\underline{z}; \alpha, \theta_3) d\theta_3. \tag{4.52}$$

وحيث أن $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ مستقلة فإن التوزيع البعدي المشترك لها يمكن كتابته على الصورة:

$$\pi_2^*(\theta_1, \theta_2, \theta_3 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \pi_2^*(\theta_1 \mid \underline{x}) \pi_2^*(\theta_2 \mid \underline{y}) \pi_2^*(\theta_3 \mid \underline{z}), \tag{4.53}$$

وعليه فإن مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يعطى من العلاقة (4.46)، حيث:

$$E(S_2 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty S_2\, \pi_2^*(\theta_1,\theta_2,\theta_3 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z})\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\theta_3. \quad (4.54)$$

أما مقدر بييز للدالة S_2 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيعطى بالعلاقة (4.48)، حيث:

$$E(e^{-aS_2} \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-aS_2}\, \pi_2^*(\theta_1,\theta_2,\theta_3 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z})\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\theta_3. \quad (4.55)$$

(٤-٣-٢) التقدير عندما $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$

Estimation when $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$

سوف نعتبر الحالة الثانية التي لا تتساوى فيها المعالم $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$، في هذه الحالة تكون S_2 على الصورة التي حصلنا عليها في العلاقة (4.39) وفيما يلي سيتم حساب التقديرات المختلفة لهذا النموذج.

(٤-٣-٢-١) تقدير الإمكان الأكبر لـ $S_2 = P(X < Y < Z)$

Maximum likelihood estimation of $S_2 = P(X < Y < Z)$

بفرض أن $X(1,n_1,\tilde{m},k),...,X(r_1,n_1,\tilde{m},k)$ هي أول r_1 إحصاء مرتب معمم من توزيع وايبل الأسي $EW(\alpha_1,\theta_1)$ وكذلك $Y(1,n_2,\tilde{m},k),...,Y(r_2,n_2,\tilde{m},k)$ هي أول r_2 إحصاء مرتب معمم من توزيع وايبل الأسي $EW(\alpha_2,\theta_2)$ فإن مقدرات الإمكان الأكبر للمعالم $\alpha_1,\theta_1,\alpha_2,\theta_2$ ولتكن $\hat{\alpha}_{1_{ML}},\hat{\theta}_{1_{ML}},\hat{\alpha}_{2_{ML}},\hat{\theta}_{2_{ML}}$ هي بالفعل التي سبق الحصول عليها بحل المعادلات غير الخطية (4.20),(4.21),(4.22),(4.23) على الترتيب.

أما إذا كانت $Z(1,n_3,\tilde{m},k),...,Z(r_3,n_3,\tilde{m},k)$ هي أول r_3 إحصاء مرتب معمم من توزيع وايبل الأسي $EW(\alpha_3,\theta_3)$، فإن مقدري الإمكان الأكبر للمعلمتين α_3,θ_3 يمكن الحصول عليهما بالمثل بحل المعادلتين غير الخطيتين التاليتين:

$$\frac{r_3}{\hat{\alpha}_{3_{ML}}}+\sum_{i=1}^{r_3-1}\frac{m_i\hat{\theta}_{3_{ML}}u^{\hat{\theta}_{3_{ML}}-1}(z_i)z_i^{\hat{\alpha}_{3_{ML}}}e^{-z_i^{\hat{\alpha}_{3_{ML}}}}\ln z_i}{1-u^{\hat{\theta}_{3_{ML}}}(z_i)}$$
$$+\sum_{i=1}^{r_3}\ln z_i\left(1-z_i^{\alpha_3}+\frac{(\hat{\theta}_{3_{ML}}-1)z_i^{\hat{\alpha}_{3_{ML}}}e^{-z_i^{\hat{\alpha}_{3_{ML}}}}}{u(z_i)}\right) \qquad (4.56)$$
$$+\frac{(\gamma_{r_3}-1)\hat{\theta}_{3_{ML}}u^{\hat{\theta}_{3_{ML}}-1}(z_{r_3})z_{r_3}^{\hat{\alpha}_{3_{ML}}}e^{-z_{r_3}^{\hat{\alpha}_{3_{ML}}}}\ln z_{r_3}}{1-u^{\hat{\theta}_{3_{ML}}}(z_{r_3})}=0,$$

$$\frac{r_3}{\hat{\theta}_{3_{ML}}}+\sum_{i=1}^{r_3-1}\frac{m_iu^{\hat{\theta}_{3_{ML}}}(z_i)\ln u(z_i)}{1-u^{\hat{\theta}_{3_{ML}}}(z_i)}+\sum_{i=1}^{r_3}\ln u(z_i)+\frac{(\gamma_{r_3}-1)u^{\hat{\theta}_{3_{ML}}}(z_{r_3})\ln u(z_{r_3})}{1-u^{\hat{\theta}_{3_{ML}}}(z_{r_3})}=0, \qquad (4.57)$$

بالتالي فإن مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_2 نحصل عليه من المعادلة (4.40) بعد التعويض عن قيم المعالم $\alpha_1,\theta_1,\alpha_2,\theta_2,\alpha_3,\theta_3$ بمقدرات الإمكان الأكبر لها $\hat{\alpha}_{1_{ML}},\hat{\theta}_{1_{ML}},\hat{\alpha}_{2_{ML}}\hat{\theta}_{2_{ML}},\hat{\alpha}_{3_{ML}}\hat{\theta}_{3_{ML}}$ فيكون على الصورة:

$$\hat{S}_{2_{ML}}=\hat{\alpha}_{2_{ML}}\hat{\theta}_{2_{ML}}[\int_0^\infty y^{\hat{\alpha}_{2ML}-1}e^{-y^{\hat{\alpha}_{2ML}}}(1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{1ML}}})^{\hat{\theta}_{1ML}}(1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{2ML}}})^{\hat{\theta}_{2ML}-1}dy$$
$$-\int_0^\infty y^{\hat{\alpha}_{2ML}-1}e^{-y^{\hat{\alpha}_{2ML}}}(1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{1ML}}})^{\hat{\theta}_{1ML}}(1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{2ML}}})^{\hat{\theta}_{2ML}-1}(1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{3ML}}})^{\hat{\theta}_{3ML}}dy\ ]. \qquad (4.58)$$

(٤-٣-٢-٢) تقدير بييز للنموذج $S_2=P(X<Y<Z)$

Bayes estimation of the model $S_2=P(X<Y<Z)$

سيتم في هذا البند تقدير النموذج S_2 باستخدام طرق بييز وذلك بافتراض أنواع مختلفة من التوزيعات القبلية للمعالم $\alpha_i,\theta_i,i=1,2,3$.

(٤-٣-٢-٢-١) تقدير بييز للنموذج $S_2=P(X<Y<Z)$ باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعالم $(\alpha_i,\theta_i),i=1,2,3$

Bayes estimation of the model $S_2=P(X<Y<Z)$ **using informative prior distributions for** $(\alpha_i,\theta_i),i=1,2,3$

بفرض أن المعالم $(\alpha_i,\theta_i),i=1,2,3$ مجهولة والتوزيع القبلي لكل منها هو المعطى بالعلاقتين (4.25)،(4.26)، وقد سبق الحصول على التوزيع البعدي للمعالم $(\alpha_i,\theta_i),i=1,2$ بالعلاقة (4.27) أما التوزيع البعدي للمعلمتين (α_3,θ_3) فنحصل عليه بالمثل على الصورة:

$$\pi_3^*(\alpha_3,\theta_3 \mid \underline{z}) = k_3^{*^{-1}} \alpha_3^{\,r_3+d_3-\nu_3-1} \theta_3^{\,r_3+\nu_3-1} e^{-(\alpha_3^2+b_3\theta_3)/b_3\alpha_3} \eta(\underline{z};\alpha_3,\theta_3), \tag{4.59}$$

حيث

$$k_3^* = \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha_3^{\,r_3+d_3-\nu_3-1} \theta_3^{\,r_3+\nu_3-1} e^{-(\alpha_3^2+b_3\theta_3)/b_3\alpha_3} \eta(\underline{z};\alpha_3,\theta_3)\, d\alpha_3\, d\theta_3, \tag{4.60}$$

وحيث أن المعالم $(\alpha_i,\theta_i), i=1,2,3$ مستقلة فإن التوزيع البعدي المشترك لها يمكن كتابته على الصورة:

$$\pi_3^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \pi_3^*(\alpha_1,\theta_1 \mid \underline{x})\pi_3^*(\alpha_2,\theta_2 \mid \underline{y})\pi_3^*(\alpha_3,\theta_3 \mid \underline{z}), \tag{4.61}$$

وعليه فإن مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يعطى من العلاقة (4.46) حيث:

$$\begin{aligned} E(S_2 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty S_2 \\ \pi_3^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z})\, d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \end{aligned} \tag{4.62}$$

أما مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيعطى من العلاقة (4.48) حيث:

$$\begin{aligned} E(e^{-aS_2} \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-aS_2} \\ \pi_3^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z})\, d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \end{aligned} \tag{4.63}$$

(٤-٣-٢-٢-٢) تقدير بييز لـ $S_2 = P(X<Y<Z)$ باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعالم $(\alpha_i,\theta_i), i=1,2,3$

Bayes estimation of $S_2 = P(X<Y<Z)$ using non - informative prior distributions for $(\alpha_i,\theta_i), i=1,2,3$.

بفرض أن المعالم $(\alpha_i,\theta_i), i=1,2,3$ مجهولة والتوزيع القبلي لكل منها هو توزيع قبلي غير معلم منتظم كما هو معطى بالعلاقتين (4.32) و (4.33) والذي استخدم في Singh, Gupta and Upadhyay (2005a,b)، بالتالي فإن التوزيع البعدي المشترك للمعلمتين $(\alpha_i,\theta_i), i=1,2$ سبق الحصول عليه من العلاقة (4.34) أما التوزيع البعدي للمعلمتين (α_3,θ_3) فقد تم الحصول عليه بالمثل على الصورة:

$$\pi_4^*(\alpha_3,\theta_3 \mid \underline{z}) = j_3^{*^{-1}} \alpha_3^{r_3} \theta_3^{r_3-1}\, \eta(\underline{z};\alpha_3,\theta_3), \tag{4.64}$$

حيث

$$j_3^* = \int_0^{\infty}\int_0^{c_3} \alpha_3^{r_3}\theta_3^{r_3-1}\, \eta(\underline{z};\alpha_3,\theta_3) d\alpha_3\, d\theta_3, \tag{4.65}$$

وحيث أن المعالم $(\alpha_i,\theta_i), i=1,2,3$ مستقلة فإن التوزيع البعدي المشترك لها يمكن كتابته على الصورة:

$$\pi_4^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \pi_4^*(\alpha_1,\theta_1 \mid \underline{x})\pi_4^*(\alpha_2,\theta_2 \mid \underline{y})\pi_4^*(\alpha_3,\theta_3 \mid \underline{z}), \tag{4.66}$$

وعليه فإن مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يعطى من العلاقة (4.46) حيث:

$$E(S_2 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c_3}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1} S_2\, \pi_4^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \tag{4.67}$$

أما مقدر بييز للدالة S_2 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيعطى من العلاقة (4.48) حيث:

$$E(e^{-aS_2} \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c_3}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1} e^{-aS_2}\, \pi_4^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \tag{4.68}$$

(٤-٤) حالات خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة

Special Cases from the Generalized Order Statistics

(٤-٤-١) تقدير نماذج الإجهاد- القوة اعتمادا على العينات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني

Estimation of stress - strength models based on progressive type-II censored samples

كما ذكرنا في الفصول السابقة فإن العينة المراقبة تتابعيا يمكن الحصول عليها كحالة خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة وذلك بوضع $m_i = R_i$ لجميع قيم $i=1,2,\ldots,r-1$ و$\gamma_r = R_r + 1$، وبالتالي يمكن تخصيص المقدرات المختلفة التي سبق الحصول عليها لنماذج الإجهاد - القوة لتوزيع وايبل الأسي اعتمادا على العينة المراقبة تتابعيا كما يلي:

(٤-٤-١-١) تقدير النموذج $S_1 = P(Y < X)$

(٤-٤-١-١-١) التقدير عندما تتساوى المعالم $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ وتكون معلومة

(٤-٤-١-١-١-١) تقدير الإمكان الأكبر للنموذج $S_1 = P(Y < X)$

يمكن الحصول على مقدر الإمكان الأكبر لنموذج الإجهاد – القوة S_1 من العلاقة (4.5) على الصورة:

$$\hat{S}_{1_{MLp}} = \frac{\hat{\theta}_{1_{MLp}}}{\hat{\theta}_{1_{MLp}} + \hat{\theta}_{2_{MLp}}}, \qquad (4.69)$$

وباستخدام العلاقات (3.69),(4.3),(4.4), ينتج مقدر الإمكان الأكبر $\hat{\theta}_{1_{MLp}}$ من حل المعادلة الآتية بالنسبة إلى θ_1

$$\frac{r_1}{\hat{\theta}_{1_{MLp}}} - \sum_{i=1}^{r_1} \frac{R_i u^{\hat{\theta}_{1_{MLp}}}(x_i) \ln u(x_i)}{1 - u^{\hat{\theta}_{1_{MLp}}}(x_i)} + \sum_{i=1}^{r_1} \ln u(x_i) = 0, \qquad (4.70)$$

وينتج مقدر الإمكان الأكبر $\hat{\theta}_{2_{MLp}}$ من حل المعادلة الآتية بالنسبة إلى θ_2

$$\frac{r_2}{\hat{\theta}_{2_{MLp}}} - \sum_{i=1}^{r_2} \frac{R_i u^{\hat{\theta}_{2_{MLp}}}(y_i) \ln u(y_i)}{1 - u^{\hat{\theta}_{2_{MLp}}}(y_i)} + \sum_{i=1}^{r_2} \ln u(y_i) = 0, \qquad (4.71)$$

واضح أن المعادلتين غير الخطيتين (4.70)،(4.71) يستلزم حلهما طرقا عددية وسيتم استخدام طريقة نيوتن رافسون للحصول على قيم $\hat{\theta}_{1_{MLp}}, \hat{\theta}_{2_{MLp}}$.

(٤-٤-١-١-١-٢) تقدير بييز للنموذج $S_1 = P(Y < X)$

(٤-٤-١-١-١-٢-١) تقدير بييز للنموذج S_1 باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعلمتين

$\theta_i,\ i = 1,2$

يمكن الحصول على مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (4.10) فيكون على الشكل التالي:

$$\hat{S}_{1_{BSp}} = \omega \hat{S}_{1_{MLp}} + (1-\omega) E(S_1 \mid \underline{x}, \underline{y}), \qquad (4.72)$$

حيث $\hat{S}_{1_{MLP}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_1 والذي يأخذ الشكل (4.69) و

$$E(S_1 \mid \underline{x}, \underline{y}) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \pi_1^*(\theta_1, \theta_2 \mid \underline{x}, \underline{y})\, d\theta_1\, d\theta_2, \qquad (4.73)$$

حيث

$$\pi_1^*(\theta_1, \theta_2 \mid \underline{x}, \underline{y}) = B_1^{-1} [\prod_{i=1}^{2} \theta_i^{r_i + v_i - 1} e^{-\delta_i \theta_i}] \sum_{r_1} \sum_{r_2} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1 + \xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2]}, \qquad (4.74)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{r_i}=\sum_{\ell_1=0}^{R_1}\cdots\sum_{\ell_{r_i}=0}^{R_{r_i}}\binom{R_1}{\ell_1}\cdots\binom{R_{r_i}}{\ell_{r_i}}(-1)^{\sum_{i=1}^{r_i}\ell_i}\ ,\ \ i=1,2,\\
&\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)=-\sum_{i=1}^{r_1}(\ell_i+1)\ln u(x_i),\\
&\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)=-\sum_{i=1}^{r_2}(\ell_i+1)\ln u(y_i),\\
&B_1=\int_0^\infty\int_0^\infty[\prod_{i=1}^{2}\theta_i^{r_i+\nu_i-1}e^{-\delta_i\theta_i}]\sum_{r_1}\sum_{r_2}e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2]}d\theta_1 d\theta_2.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.75)$$

بالتعويض من (4.74) في (4.73) نحصل على

$$E(S_1\,|\,\underline{x},\underline{y})=B_1^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}[\prod_{i=1}^{2}\theta_i^{r_i+\nu_i-1}e^{-\delta_i\theta_i}]\sum_{r_1}\sum_{r_2}e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2]}d\theta_1 d\theta_2\,,\qquad(4.76)$$

أما مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فنحصل عليـه من العلاقة (4.12) على الصورة:

$$\hat{S}_{1_{BLp}}=-\frac{1}{a}\ln[\omega e^{-a\hat{S}_{1_{MLp}}}+(1-\omega)E(e^{-aS_1}\,|\,\underline{x},\underline{y})],\qquad(4.77)$$

حيث $\hat{S}_{1_{MLP}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر لـ S_1 والمعطى بالعلاقة (4.69) و

$$E(e^{-aS_1}\,|\,\underline{x},\underline{y})=B_1^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-aS_1}[\prod_{i=1}^{2}\theta_i^{r_i+\nu_i-1}e^{\delta_i\theta_i}]\sum_{r_1}\sum_{r_2}e^{-[\theta_1\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)+\theta_2\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)]}d\theta_1 d\theta_2.\qquad(4.78)$$

(٤-١-١-١-٢-٢) تقدير بييز للنموذج S_1 باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعلمتين $\theta_i,\ i=1,2$

نحصل على مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (4.72) حيث $\hat{S}_{1_{MLP}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_1 والمعطى بالعلاقة (4.69) و

$$E(S_1\,|\,\underline{x},\underline{y})=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\pi_2^*(\theta_1,\theta_2\,|\,\underline{x},\underline{y})\,d\theta_1 d\theta_2,\qquad(4.79)$$

حيث

$$\pi_2^*(\theta_1,\theta_2\,|\,\underline{x},\underline{y})=B_2^{-1}[\prod_{i=1}^{2}\theta_i^{r_i-1}]\sum_{r_1}\sum_{r_2}e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2]}\,,\qquad(4.80)$$

$$B_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty [\prod_{i=1}^{2} \theta_i^{r_i - 1}] \sum_{r_1} \sum_{r_2} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1 + \xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2]} d\theta_1 d\theta_2, \tag{4.81}$$

بالتعويض من (4.80) في (4.79) نحصل على

$$E(S_1 | \underline{x}, \underline{y}) = B_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} [\prod_{i=1}^{2} \theta_i^{r_i - 1}] \sum_{r_1} \sum_{r_2} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1 + \xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2]} d\theta_1 d\theta_2 . \tag{4.82}$$

أما مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيعطى من العلاقة (4.77) حيث $\hat{S}_{1_{MLP}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر لـ S_1 والمعطى بالعلاقة (4.69) و

$$E(e^{-aS_1} | \underline{x}, \underline{y}) = B_2^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-aS_1} [\prod_{i=1}^{2} \theta_i^{r_i - 1}] \sum_{r_1} \sum_{r_2} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1 + \xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2]} d\theta_1 d\theta_2. \tag{4.83}$$

(٤-٤-١-١-٢) التقدير عندما $\alpha_1 \neq \alpha_2$

(٤-٤-١-١-٢-١) تقدير الإمكان الأكبر للنموذج $S_1 = P(Y < X)$

في هذه الحالة يعطى مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_1 من المعادلة (4.24) فيكون على الشكل:

$$\hat{S}_{1_{MLp}} = \hat{\alpha}_{1_{MLp}} \hat{\theta}_{1_{MLp}} \int_0^\infty x^{\hat{\alpha}_{1_{MLp}} - 1} e^{-x^{\hat{\alpha}_{1_{MLp}}}} (1 - e^{-x^{\hat{\alpha}_{1_{MLp}}}})^{\hat{\theta}_{1_{MLp}} - 1} (1 - e^{-x^{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}}})^{\hat{\theta}_{2_{MLp}}} dx, \tag{4.84}$$

وباستخدام العلاقات (3.68)،(3.69)،(4.20)،(4.21)،(4.22)،(4.23) نحصل على القيم $(\hat{\alpha}_{1_{MLp}}, \hat{\theta}_{1_{MLp}}), (\hat{\alpha}_{2_{MLp}}, \hat{\theta}_{2_{MLp}})$ بحل المعادلات غير الخطية التالية عدديا:

$$\frac{r_1}{\hat{\alpha}_{1_{MLp}}} - \sum_{i=1}^{r_1} \frac{R_i \hat{\theta}_{1_{MLp}} u^{\hat{\theta}_{1_{MLp}} - 1}(x_i) x_i^{\hat{\alpha}_{1_{MLp}}} e^{-x_i^{\hat{\alpha}_{1_{MLp}}}} \ln x_i}{1 - u^{\hat{\theta}_{1_{MLp}}}(x_i)} + \sum_{i=1}^{r_1} \ln x_i \left(1 - x_i^{\hat{\alpha}_{1_{MLp}}} + \frac{(\hat{\theta}_{1_{MLp}} - 1) x_i^{\hat{\alpha}_{1_{MLp}}} e^{-x_i^{\hat{\alpha}_{1_{MLp}}}}}{u(x_i)} \right) = 0, \tag{4.85}$$

$$\frac{r_1}{\hat{\theta}_{1_{MLp}}} - \sum_{i=1}^{r_1} \frac{R_i u^{\hat{\theta}_{1_{MLp}}}(x_i) \ln u(x_i)}{1 - u^{\hat{\theta}_{1_{MLp}}}(x_i)} + \sum_{i=1}^{r_1} \ln u(x_i) = 0, \tag{4.86}$$

$$\frac{r_2}{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}} - \sum_{i=1}^{r_2} \frac{R_i \hat{\theta}_{2_{MLp}} u^{\hat{\theta}_{2_{MLp}} - 1}(y_i) y_i^{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}} e^{-y_i^{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}}} \ln y_i}{1 - u^{\hat{\theta}_{2_{MLp}}}(y_i)} + \sum_{i=1}^{r_2} \ln y_i \left(1 - y_i^{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}} + \frac{(\theta_2 - 1) y_i^{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}} e^{-y_i^{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}}}}{u(y_i)} \right) = 0, \tag{4.87}$$

$$\frac{r_2}{\hat{\theta}_{2_{MLp}}} - \sum_{i=1}^{r_2} \frac{R_i u^{\hat{\theta}_{2_{MLp}}}(y_i) \ln u(y_i)}{1-u^{\hat{\theta}_{2_{MLp}}}(y_i)} + \sum_{i=1}^{r_2} \ln u(y_i) = 0. \qquad (4.88)$$

(٤-٤-١-١-٢-٢) تقدير بييز للنموذج $S_1 = P(Y < X)$

في هذا البند سيتم الحصول على مقدرات بييز للنموذج S_1 اعتمادا على توزيعات قبليـة معلمة وأخرى غير معلمة للمعالم $(\alpha_i, \theta_i), i = 1,2$.

(٤-٤-١-١-٢-٢-١) تقدير بييز للنموذج S_1 باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعالم $(\alpha_i, \theta_i), i = 1,2$

مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنـة يكـون علـى الصورة (4.72) حيث $\hat{S}_{1_{MLp}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_1 المعطى بالعلاقة (4.84) و

$$E(S_1 \mid \underline{x}, \underline{y}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha_1 \theta_1 x^{\alpha_1 - 1} e^{-x^{\alpha_1}} (1-e^{-x^{\alpha_1}})^{\theta_1 - 1} (1-e^{-x^{\alpha_2}})^{\theta_2} \pi_3^*(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2 \mid \underline{x}, \underline{y}) dx\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2, \qquad (4.89)$$

حيث

$$\pi_3^*(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2 \mid \underline{x}, \underline{y}) = B_3^{-1} \left[\prod_{i=1}^{2} \alpha_i^{\,r_i + d_i - v_i - 1} \theta_i^{\,r_i + v_i - 1} e^{-(\alpha_i^2 + b_i \theta_i)/b_i \alpha_i}\right] \left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right) \sum_{r_1} \sum_{r_2} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1, r_1)\theta_1 + \xi_2(\underline{y};\alpha_2, r_2)\theta_2]}, \qquad (4.90)$$

$$B_3 = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\prod_{i=1}^{2} \alpha_i^{\,r_i + d_i - v_i - 1} \theta_i^{\,r_i + v_i - 1} e^{-(\alpha_i^2 + b_i \theta_i)/b_i \alpha_i}\right] \left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right) \left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right) \sum_{r_1} \sum_{r_2} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1, r_1)\theta_1 + \xi_2(\underline{y};\alpha_2, r_2)\theta_2]} d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2, \qquad (4.91)$$

بالتعويض من (4.90) في (4.89) نحصل على

$$E(S_1 \mid \underline{x}, \underline{y}) = B_3^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha_1 \theta_1 x^{\alpha_1 - 1} e^{-x^{\alpha_1}} (1-e^{-x^{\alpha_1}})^{\theta_1 - 1} (1-e^{-x^{\alpha_2}})^{\theta_2} \left[\prod_{i=1}^{2} \alpha_i^{\,r_i + d_i - v_i - 1} \theta_i^{\,r_i + v_i - 1} e^{-(\alpha_i^2 + b_i \theta_i)/b_i \alpha_i}\right] \left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right) \left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right) \sum_{r_1} \sum_{r_2} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1, r_1)\theta_1 + \xi_2(\underline{y};\alpha_2, r_2)\theta_2]} dx\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2. \qquad (4.92)$$

أما مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيكون علـى الصورة (4.77)، حيث $\hat{S}_{1_{MLp}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_1 المعطى بالعلاقة (4.84) و

$$E(e^{-aS_1} \mid \underline{x},\underline{y}) = B_3^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} [\prod_{i=1}^{2} \alpha_i^{\,r_i+d_i-\nu_i-1}\theta_i^{\,r_i+\nu_i-1} e^{-(\alpha_i^2+b_i\theta_i)/b_i\alpha_i}] e^{-aS_1}$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)\sum_{r_1}\sum_{r_2} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha_2,r_2)\theta_2]}\, d\alpha_1 d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2. \quad (4.93)$$

(٤-٤-١-١-٢-٢-٢) تقدير بييز للنموذج S_1 باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعالم $(\alpha_i,\theta_i), i=1,2$

مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يكـون علـى الصورة (4.72) حيث $\hat{S}_{1_{MLp}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_1 المعطى بالعلاقة (4.84) و

$$E(S_1 \mid \underline{x},\underline{y}) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1}\int_0^{\infty} \alpha_1\theta_1 x^{\alpha_1-1} e^{-x^{\alpha_1}} (1-e^{-x^{\alpha_1}})^{\theta_1-1} (1-e^{-x^{\alpha_2}})^{\theta_2}$$
$$\pi_4^*(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y})\, dx\; d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2, \quad (4.94)$$

حيث

$$\pi_4^*(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y}) = B_4^{-1}[\prod_{i=1}^{2} \alpha_i^{\,r_i}\theta_i^{\,r_i-1}]$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)\sum_{r_1}\sum_{r_2} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha_2,r_2)\theta_2]}, \quad (4.95)$$

$$B_4 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1} [\prod_{i=1}^{2} \alpha_i^{\,r_i}\theta_i^{\,r_i-1}]\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)$$
$$\sum_{r_1}\sum_{r_2} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha_2,r_2)\theta_2]}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2, \quad (4.96)$$

بالتعويض من (4.95) في (4.94) نحصل على

$$E(S_1 \mid \underline{x},\underline{y}) = B_4^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1}\int_0^{\infty} \alpha_1\theta_1 x^{\alpha_1-1} e^{-x^{\alpha_1}} (1-e^{-x^{\alpha_1}})^{\theta_1-1} (1-e^{-x^{\alpha_2}})^{\theta_2}$$
$$[\prod_{i=1}^{2} \alpha_i^{\,r_i}\theta_i^{\,r_i-1}]\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right) \quad (4.97)$$
$$\sum_{r_1}\sum_{r_2} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha_2,r_2)\theta_2]}\, dx\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2.$$

أما مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيكون علـى الصورة (4.77) حيث $\hat{S}_{1_{MLp}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_1 المعطى بالعلاقة (4.84) و

$$E(e^{-aS_1} \mid \underline{x},\underline{y}) = B_4^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1} [\prod_{i=1}^{2} \alpha_i^{\,r_i-1}\theta_i^{\,r_i-1}] e^{-aS_1}\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)\sum_{r_1}\sum_{r_2} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha_2,r_2)\theta_2]}\, d\alpha_1 d\alpha_2 d\theta_1\, d\theta_2. \quad (4.98)$$

(٤-٤-١-٢) تقدير النموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$

(٤-٤-١-٢-١) التقدير عندما $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ وتكون معلومة

(٤-٤-١-٢-١-١) تقدير الإمكان الأكبر للنموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$

مقدر الإمكان الأكبر لنموذج الإجهاد – القوة S_2 نحصل عليه من العلاقة (4.40) فيكون على الصورة:

$$\hat{S}_{2_{MLp}} = \frac{\hat{\theta}_{2_{MLp}}}{\hat{\theta}_{1_{MLp}} + \hat{\theta}_{2_{MLp}}} - \frac{\hat{\theta}_{2_{MLp}}}{\hat{\theta}_{1_{MLp}} + \hat{\theta}_{2_{MLp}} + \hat{\theta}_{3_{MLp}}}, \qquad (4.99)$$

حيث تنتج مقدرات الإمكان الأكبر $\hat{\theta}_{1_{MLp}}, \hat{\theta}_{2_{MLp}}$ بحل المعادلات (4.70)،(4.71) عدديا، أما مقدر الإمكان الأكبر $\hat{\theta}_{3_{MLp}}$ فينتج بالمثل بحل المعادلة التالية عدديا

$$\frac{r_3}{\theta_{3_{MLp}}} - \sum_{i=1}^{r_3} \frac{R_i u^{\hat{\theta}_{3_{MLp}}}(z_i) \ln u(z_i)}{1 - u^{\hat{\theta}_{3_{MLp}}}(z_i)} + \sum_{i=1}^{r_3} \ln u(z_i) = 0. \qquad (4.100)$$

(٤-٤-١-٢-١-٢) تقدير بييز للنموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$

(٤-٤-١-٢-١-٢-١) تقدير بييز للنموذج S_2 باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعالم $\theta_i,\ i = 1,2,3$

مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة نحصل عليه من العلاقة (4.46) فيكون على الصورة:

$$\hat{S}_{2_{BSp}} = \omega \hat{S}_{2_{MLp}} + (1-\omega) E(S_2 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}), \qquad (4.101)$$

حيث $\hat{S}_{2_{MLp}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_2 المعطى بالعلاقة (4.99) و

$$E(S_2 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} - \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \right] \pi_1^*(\theta_1, \theta_2, \theta_3 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\theta_3, \qquad (4.102)$$

حيث

$$\pi_1^*(\theta_1, \theta_2, \theta_3 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = B_5^{-1} [\prod_{i=1}^{3} \theta_i^{r_i + \nu_i - 1} e^{-\theta_i \delta_i}] \sum_{r_1} \sum_{r_2} \sum_{r_3} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1 + \xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2 + \xi_3(\underline{z};\alpha,r_3)\theta_3]}, \qquad (4.103)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{r_3}=\sum_{\ell_1=0}^{R_1}\cdots\sum_{\ell_{r_3}=0}^{R_{r_3}}\binom{R_1}{\ell_1}\cdots\binom{R_{r_3}}{\ell_{r_i}}(-1)^{\sum_{i=1}^{r_3}\ell_i}\ ,\\
&\xi_3(\underline{z};\alpha,r_3)=-\sum_{i=1}^{r_3}(\ell_i+1)\ln u(z_i),\\
&B_5\ =\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\ [\prod_{i=1}^{3}\theta_i^{r_i+\nu_i-1}e^{-\delta_i\theta_i}]\\
&\qquad\sum\nolimits_{r_1}\sum\nolimits_{r_2}\sum\nolimits_{r_3}e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha,r_3)\theta_3]}\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3.
\end{aligned}\right\}\quad(4.104)$$

بالتعويض من (4.103) في (4.102) نحصل على

$$\begin{aligned}
E(S_2\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z})=B_5^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}-\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2+\theta_3}\right][\prod_{i=1}^{3}\ \theta_i^{r_i+\nu_i-1}e^{-\theta_i\delta_i}\,]\\
\sum\nolimits_{r_1}\sum\nolimits_{r_2}\sum\nolimits_{r_3}e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha,r_3)\theta_3]}\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3,
\end{aligned}\quad(4.105)$$

أما مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فنحصل عليه من العلاقة (4.48) فيكون على الصورة التالية:

$$\hat{S}_{2_{BLp}}=-\frac{1}{a}\ln[\omega e^{-a\hat{S}_{2_{MLp}}}+(1-\omega)E(e^{-aS_2}\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z})],\quad(4.106)$$

حيث $\hat{S}_{2_{MLp}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_2 المعطى بالعلاقة (4.99) و

$$\begin{aligned}
E(e^{-aS_2}\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z})=B_5^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\ [\prod_{i=1}^{3}\ \theta_i^{r_i+\nu_i-1}e^{-\theta_i\delta_i}\,]e^{-aS_2}\\
\sum\nolimits_{r_1}\sum\nolimits_{r_2}\sum\nolimits_{r_3}e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha,r_3)\theta_3]}\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3.
\end{aligned}\quad(4.107)$$

(٤-١-٢-١-٢-٢) تقدير بييز للنموذج S_2 باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعالم $\theta_i,\ i=1,2,3$

مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يكون على الصورة (4.101) حيث $\hat{S}_{2_{MLP}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_2 المعطى بالعلاقة (4.99) و

$$\begin{aligned}
E(S_2\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z})=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}-\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2+\theta_3}\right]\\
\pi_2^*(\theta_1,\theta_2,\theta_3\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z})\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3,
\end{aligned}\quad(4.108)$$

حيث

$$\pi_2^*(\theta_1,\theta_2,\theta_3\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = B_6^{-1}[\prod_{i=1}^{3} \theta_i^{r_i-1}] \sum_{r_1}\sum_{r_2}\sum_{r_3} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha,r_3)\theta_3]}, \tag{4.109}$$

$$B_6 = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty [\prod_{i=1}^{3}\theta_i^{r_i-1}] \sum_{r_1}\sum_{r_2}\sum_{r_3} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha,r_3)\theta_3]}\, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \tag{4.110}$$

بالتعويض من (4.109) في (4.108) نحصل على

$$E(S_2\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = B_6^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2} - \frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2+\theta_3}\right][\prod_{i=1}^{3}\theta_i^{r_i-1}] \sum_{r_1}\sum_{r_2}\sum_{r_3} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha,r_3)\theta_3]}\, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \tag{4.111}$$

أما مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيكون على الصورة (4.106) حيث $\hat{S}_{2_{MLp}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_2 المعطى بالعلاقة (4.99) و

$$E(e^{-aS_2}\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = B_6^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty [\prod_{i=1}^{3}\theta_i^{r_i-1}]e^{-aS_2} \sum_{r_1}\sum_{r_2}\sum_{r_3} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha,r_3)\theta_3]}\, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \tag{4.112}$$

(٤-٤-١-٢-٢) التقدير عندما $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$

(٤-٤-١-٢-٢-١) تقدير الإمكان الأكبر للنموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$

في هذه الحالة يعطى مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_2 من المعادلة (4.58) فيكون على الشكل:

$$\hat{S}_{2_{MLP}} = \hat{\alpha}_{2_{MLp}}\hat{\theta}_{2_{MLp}}[\int_0^\infty y^{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}-1}e^{-y^{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}}}(1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{1_{MLp}}}})^{\hat{\theta}_{1_{MLp}}}(1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}}})^{\hat{\theta}_{2_{MLp}}-1}dy - \int_0^\infty y^{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}-1}e^{-y^{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}}}(1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{1_{MLp}}}})^{\hat{\theta}_{1_{MLp}}} (1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{2_{MLp}}}})^{\hat{\theta}_{2_{MLp}}-1}(1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{3_{MLp}}}})^{\hat{\theta}_{3_{MLp}}}dy], \tag{4.113}$$

حيث تنتج مقدرات الإمكان الأكبر $(\hat{\alpha}_{1_{MLp}},\hat{\theta}_{1_{MLp}}),(\hat{\alpha}_{2_{MLp}},\hat{\theta}_{2_{MLp}})$ بحل المعادلات (3.85)،(3.86)،(4.87)،(4.88)عدديا، أما مقدرا الإمكان الأكبر $(\hat{\alpha}_{3_{MLp}},\hat{\theta}_{3_{MLp}})$ فيمكن الحصول عليهما بالمثل بحل المعادلتين التاليتين عدديا:

$$\frac{r_3}{\hat{\alpha}_{3_{MLp}}} - \sum_{i=1}^{r_3} \frac{R_i \hat{\theta}_{3_{MLp}} u^{\hat{\theta}_{3_{MLp}}-1}(z_i) z_i^{\hat{\alpha}_{3_{MLp}}} e^{-z_i^{\hat{\alpha}_{3_{MLp}}}} \ln z_i}{1-u^{\hat{\theta}_{3_{MLp}}}(z_i)} + \sum_{i=1}^{r_3} \ln z_i \left(1 - z_i^{\hat{\alpha}_{3_{MLp}}} + \frac{(\hat{\theta}_{3_{MLp}} -1) z_i^{\hat{\alpha}_{3_{MLp}}} e^{-z_i^{\hat{\alpha}_{3_{MLp}}}}}{u(z_i)} \right) = 0 , \quad (4.114)$$

$$\frac{r_3}{\hat{\theta}_{3_{MLp}}} - \sum_{i=1}^{r_3} \frac{R_i u^{\hat{\theta}_{3_{MLp}}}(z_i) \ln u(z_i)}{1-u^{\hat{\theta}_{3_{MLp}}}(z_i)} + \sum_{i=1}^{r_3} \ln u(z_i) = 0, \quad (4.115)$$

(٤-٤-١-٢-٢-٢) تقدير بييز للنموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$

في هذا البند سيتم الحصول على مقدرات بييز للنموذج S_2 اعتمادا على توزيعات قبلية معلمة وأخرى غير معلمة للمعالم $(\alpha_i , \theta_i), i = 1,2,3$.

(٤-٤-١-٢-٢-٢-١) تقدير بييز للنموذج S_2 باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعالم $(\alpha_i , \theta_i), i = 1,2,3$

مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يكـون علـى الصورة (4.101) حيث $\hat{S}_{2_{MLP}}$ هو مقدر الإمكان الأكبـر للنمـوذج S_2 المعطـى بالعلاقـة (4.113) و

$$E(S_2 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha_2 \theta_2 [\int_0^\infty y^{\alpha_2 -1} e^{-y^{\alpha_2}} (1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1} (1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2 -1} dy - \int_0^\infty y^{\alpha_2 -1} e^{-y^{\alpha_2}} (1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1} (1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2 -1} (1-e^{-y^{\alpha_3}})^{\theta_3} dy] \pi_3^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1 \, d\theta_2 d\theta_3, \quad (4.116)$$

حيث

$$\pi_3^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = B_7^{-1} [\prod_{i=1}^{3} \alpha_i^{r_i + d_i - v_i -1} \theta_i^{r_i + v_i -1} e^{-(\alpha_i^2 + b_i \theta_i)/b_i \alpha_i}] \left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i) \right) \left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i) \right) \left(\prod_{i=1}^{r_3} v(z_i) \right) \sum_{r_1} \sum_{r_2} \sum_{r_3} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1,r_1)\theta_1 + \xi_2(\underline{y};\alpha_2,r_2)\theta_2 + \xi_3(\underline{z};\alpha_3,r_3)\theta_3]}, \quad (4.117)$$

$$B_7 = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty [\prod_{i=1}^{3} \alpha_i^{\, r_i+d_i-v_i-1} \theta_i^{\, r_i+v_i-1} e^{-(\alpha_i^2+b_i\theta_i)/b_i\alpha_i}] \left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3} v(z_i)\right)\sum_{r_1}\sum_{r_2}\sum_{r_3} e^{-[\theta_1\xi_1(\underline{x};\alpha,r_1)+\theta_2\xi_2(\underline{y};\alpha,r_2)+\theta_3\xi_3(\underline{z};\alpha,r_3)]} d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3\, d\theta_1\, d\theta_2 d\theta_3. \quad (4.118)$$

بالتعويض من (4.117) في (4.116) نحصل على

$$E(S_2 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = B_7^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha_2\theta_2 [\int_0^\infty y^{\alpha_2-1} e^{-y^{\alpha_2}} (1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1} (1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1} dy - \int_0^\infty y^{\alpha_2-1} e^{-y^{\alpha_2}} (1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1} (1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1} (1-e^{-y^{\alpha_3}})^{\theta_3} dy\,] [\prod_{i=1}^{3} \alpha_i^{\, r_i+d_i-v_i-1} \theta_i^{\, r_i+v_i-1} e^{-(\alpha_i^2+b_i\theta_i)/b_i\alpha_i}] \left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3} v(z_i)\right)\sum_{r_1}\sum_{r_2}\sum_{r_3} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha_2,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha_3,r_3)\theta_3]} d\alpha_1\, d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1\, d\theta_2 d\theta_3, \quad (4.119)$$

أما مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيكون علـى الصورة (4.106) حيث $\hat{S}_{MLp}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_2 المعطى بالعلاقة (4.113) و

$$E(e^{-aS_2} \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = B_7^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty [\prod_{i=1}^{3} \alpha_i^{\, r_i+d_i-v_i-1} \theta_i^{\, r_i+v_i-1} e^{-(\alpha_i^2+b_i\theta_i)/b_i\alpha_i}] e^{-aS_2} \left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3} v(z_i)\right)\sum_{r_1}\sum_{r_2}\sum_{r_3} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha_2,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha_3,r_3)\theta_3]} d\alpha_1\, d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1\, d\theta_2 d\theta_3, \quad (4.120)$$

(٤-٤-١-٢-٢-٢-٢) تقدير بييز للنموذج S_2 باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعالم $(\alpha_i,\theta_i), i=1,2,3$

مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنـة يكـون علـى الصورة (4.101) حيث $\hat{S}_{2_{MLP}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_2 المعطى بالعلاقة (4.113) و

$$E(S_2 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{c_3} \int_0^{c_2} \int_0^{c_1} \alpha_2\theta_2 [\int_0^\infty y^{\alpha_2-1} e^{-y^{\alpha_2}} (1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1} (1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1} dy - \int_0^\infty y^{\alpha_2-1} e^{-y^{\alpha_2}} (1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1} (1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1} (1-e^{-y^{\alpha_3}})^{\theta_3} dy\,] \pi_4^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta_1,\theta_2\theta_3 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) \, d\alpha_1\, d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1\, d\theta_2 d\theta_3, \quad (4.121)$$

حيث

$$\pi_4^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = B_8^{-1}[\prod_{i=1}^{3}\alpha_i^{\,r_i}\theta_i^{\,r_i-1}]\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3} v(z_i)\right)\sum_{r_1}\sum_{r_2}\sum_{r_3} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha_2,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha_3,r_3)\theta_3]}, \quad (4.122)$$

$$B_8 = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{c_3}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1}[\prod_{i=1}^{3}\alpha_i^{\,r_i}\theta_i^{\,r_i-1}]\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3} v(z_i)\right)\sum_{r_1}\sum_{r_2}\sum_{r_3} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha_2,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha_3,r_3)\theta_3]}\, d\alpha_1\, d\alpha_2 d\alpha_3\, d\theta_1\, d\theta_2 d\theta_3. \quad (4.123)$$

بالتعويض من (4.122) في (4.121) نحصل على

$$E(S_2\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = B_8^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{c_3}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1} \alpha_2\theta_2[\int_0^\infty y^{\alpha_2-1}e^{-y^{\alpha_2}}(1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1}(1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1}dy - \int_0^\infty y^{\alpha_2-1}e^{-y^{\alpha_2}}(1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1}(1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1}(1-e^{-y^{\alpha_3}})^{\theta_3}dy\,]\,[\prod_{i=1}^{3}\alpha_i^{\,r_i}\theta_i^{\,r_i-1}]\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3} v(z_i)\right)\sum_{r_1}\sum_{r_2}\sum_{r_3} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha_2,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha_3,r_3)\theta_3]} d\alpha_1\, d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1\, d\theta_2 d\theta_3, \quad (4.124)$$

أما مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيكون علـى الصورة (4.106) حيث $\hat{S}_{2_{MLP}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_2 المعطى بالعلاقة (4.113) و

$$E(e^{-aS_2}\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = B_8^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{c_3}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1}[\prod_{i=1}^{3}\alpha_i^{\,r_i}\theta_i^{\,r_i-1}]e^{-aS_2}\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3} v(z_i)\right)\sum_{r_1}\sum_{r_2}\sum_{r_3} e^{-[\xi_1(\underline{x};\alpha_1,r_1)\theta_1+\xi_2(\underline{y};\alpha_2,r_2)\theta_2+\xi_3(\underline{z};\alpha_3,r_3)\theta_3]} d\alpha_1\, d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1\, d\theta_2 d\theta_3, \quad (4.125)$$

يتضح من العلاقات السابقة أن مقدرات بييز اعتمادا على العينات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني في حالة عدم معلومية المعلمتين تعتمد على تكاملات معقدة يصعب حسابها بالطرق التحليلية لذلك سوف نلجأ لاستخدام طرق سلسلة ماركوف (MCMC) لحساب التقديرات في هذه الحالة.

(٤-٤-٢) تقدير نماذج الإجهاد - القوة اعتمادا على القيم المسجلة الدنيا

Estimation of stress - strength models based on lower record values

كما ذكرنا في الفصول السابقة فإن القيم المسجلة الدنيا يمكن الحصول عليها كحالة خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة بعد تحويلها إلى الإحصاءات المرتبة المعممة المقابلة وذلك باستبدال الدالة $1-F(x)$ بالدالة $F(x)$ (وهذا يكافئ استبدال الدالة $1-u^{\theta}(x)$ بالدالة $u^{\theta}(x)$) وكذلك بوضع $\gamma_r = k = 1$ و $m_i = -1$ لجميع قيم $i = 1,2,...,r-1$، وبالتالي يمكن تخصيص المقدرات المختلفة التي سبق الحصول عليها لنماذج الإجهاد - القوة لتوزيع وايبل الأسي اعتمادا على القيم المسجلة الدنيا كما يلي:

(٤-٤-٢-١) تقدير النموذج $S_1 = P(Y < X)$

(٤-٤-٢-١-١) التقدير عندما $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ وتكون معلومة

(٤-٤-٢-١-١-١) تقدير الإمكان الأكبر للنموذج $S_1 = P(Y < X)$

مقدر الإمكان الأكبر لنموذج الإجهاد – القوة S_1 نحصل عليه من العلاقة (4.5) فيأخذ الشكل التالي:

$$\hat{S}_{1_{MLr}} = \frac{\hat{\theta}_{1_{MLr}}}{\hat{\theta}_{1_{MLr}} + \hat{\theta}_{2_{MLr}}}, \tag{4.126}$$

وباستخدام العلاقة (3.112) يكون مقدرا الإمكان الأكبر للمعلمتين θ_1, θ_2 على الشكل التالي:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\theta}_{1_{MLr}} &= -\frac{r_1}{\ln u(x_{r_1})}, \\ \hat{\theta}_{2_{MLr}} &= -\frac{r_2}{\ln u(y_{r_2})}. \end{aligned}\right\} \tag{4.127}$$

(٤-٤-٢-١-١-٢) تقدير بييز للنموذج $S_1 = P(Y < X)$

(٤-٤-٢-١-١-٢-١) تقدير بييز للنموذج S_1 باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعلمتين $\theta_i, i = 1,2$

مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة نحصل عليه من العلاقة (4.10) فيأخذ الشكل التالي:

$$\hat{S}_{1_{BSr}} = \omega \hat{S}_{1_{MLr}} + (1-\omega) E(S_1 \mid \underline{x}, \underline{y}), \tag{4.128}$$

حيث $\hat{S}_{1_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_1 والذي يأخذ الشكل (4.126) و

$$E(S_1 | \underline{x}, \underline{y}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \pi_1^{**}(\theta_1, \theta_2 | \underline{x}, \underline{y}) d\theta_1 d\theta_2, \quad (4.129)$$

حيث

$$\pi_1^{**}(\theta_1, \theta_2 | \underline{x}, \underline{y}) = D_1^{-1} [\prod_{i=1}^{2} \theta_i^{r_i + v_i - 1}] e^{-[(\delta_1 - \ln u(x_{r_1}))\theta_1 + (\delta_2 - \ln u(y_{r_2}))\theta_2]}, \quad (4.130)$$

$$D_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty [\prod_{i=1}^{2} \theta_i^{r_i + v_i - 1}] e^{-[(\delta_1 - \ln u(x_{r_1}))\theta_1 + (\delta_2 - \ln u(y_{r_2}))\theta_2]} d\theta_1 d\theta_2. \quad (4.131)$$

بالتعويض من (4.130) في (4.129) نحصل على

$$E(S_1 | \underline{x}, \underline{y}) = D_1^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} [\prod_{i=1}^{2} \theta_i^{r_i + v_i - 1}] e^{-[(\delta_1 - \ln u(x_{r_1}))\theta_1 + (\delta_2 - \ln u(y_{r_2}))\theta_2]} d\theta_1 d\theta_2. \quad (4.132)$$

أما مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فنحصل عليه من العلاقة (4.12) فيكون على الصورة:

$$\hat{S}_{1_{BLr}} = -\frac{1}{a} \ln[\omega e^{-a\hat{S}_{1_{MLr}}} + (1-\omega) E(e^{-aS_1} | \underline{x}, \underline{y})], \quad (4.133)$$

حيث $\hat{S}_{1_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_1 والذي يأخذ الشكل (4.126) و

$$E(e^{-aS_1} | \underline{x}, \underline{y}) = D_1^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty [\prod_{i=1}^{2} \theta_i^{r_i + v_i - 1}] e^{-aS_1} e^{-[(\delta_1 - \ln u(x_{r_1}))\theta_1 + (\delta_2 - \ln u(y_{r_2}))\theta_2]} d\theta_1 d\theta_2. \quad (4.134)$$

(٤-٢-١-١-٢-٢) تقدير بييز للنموذج S_1 باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعلمتين $\theta_i, i = 1,2$

مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة نحصل عليه من العلاقة (4.128) حيث $\hat{S}_{1_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_1 والذي يأخذ الشكل (4.126) و

$$E(S_1 | \underline{x}, \underline{y}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \pi_2^{**}(\theta_1, \theta_2 | \underline{x}, \underline{y}) d\theta_1 d\theta_2, \quad (4.135)$$

حيث

$$\pi_2^{**}(\theta_1, \theta_2 | \underline{x}, \underline{y}) = D_2^{-1} [\prod_{i=1}^{2} \theta_i^{r_i - 1}] e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1 + (\ln u(y_{r_2}))\theta_2}, \quad (4.136)$$

$$D_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty [\prod_{i=1}^{2} \theta_i^{r_i - 1}] e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1 + (\ln u(y_{r_2}))\theta_2} d\theta_1 d\theta_2. \quad (4.137)$$

بالتعويض من (4.136) في (4.135) نحصل على

$$E(S_1 \mid \underline{x},\underline{y}) = D_2^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}[\prod_{i=1}^{2} \theta_i^{r_i-1}]\, e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2} d\theta_1\, d\theta_2 . \qquad (4.138)$$

أما مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فنحصل عليـه من العلاقة (4.133) فيأخذ الشكل التالي:

$$E(e^{-aS_1} \mid \underline{x},\underline{y}) = D_2^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-aS_1}[\prod_{i=1}^{2} \theta_i^{r_i-1}]\, e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2}\, d\theta_1\, d\theta_2 . \qquad (4.139)$$

(٤-٤-٢-١-٢) التقدير عندما $\alpha_1 \neq \alpha_2$

(٤-٤-٢-١-٢-١) تقدير الإمكان الأكبر للنموذج $S_1 = P(Y < X)$

في هذه الحالة يعطى مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_1 بالمعادلـة (4.24) فيكـون علـى الصورة:

$$\hat{S}_{1_{MLr}} = \hat{\alpha}_{1_{MLr}}\, \hat{\theta}_{1_{MLr}} \int_0^{\infty} x^{\hat{\alpha}_{1_{MLr}}-1} e^{-x^{\hat{\alpha}_{1_{MLr}}}} (1-e^{-x^{\hat{\alpha}_{1_{MLr}}}})^{\hat{\theta}_{1_{MLr}}-1} (1-e^{-x^{\hat{\alpha}_{2_{MLr}}}})^{\hat{\theta}_{2_{MLr}}} dx . \qquad (4.140)$$

حيث $\hat{\theta}_{1_{MLr}}, \hat{\theta}_{2_{MLr}}$ سبق الحصول عليهما في العلاقة (4.127)، وباستخدام العلاقـة (3.114) فإننا نحصل على $\hat{\alpha}_{1_{MLr}}, \hat{\alpha}_{2_{MLr}}$ بحل المعادلتين التاليتين عدديا:

$$\frac{r_1}{\hat{\alpha}_{1_{MLr}}} - \frac{r_1 x_{r_1}^{\hat{\alpha}_{1_{MLr}}} e^{-x_{r_1}^{\hat{\alpha}_{1_{MLr}}}} \ln x_{r_1}}{u(x_{r_1}) \ln u(x_{r_1})} + \sum_{i=1}^{r_1} \ln x_i \left(1 - x_i^{\hat{\alpha}_{1_{MLr}}} - \frac{x_i^{\hat{\alpha}_{1_{MLr}}} e^{-x_i^{\hat{\alpha}_{1_{MLr}}}}}{u(x_i)}\right) = 0, \qquad (4.141)$$

$$\frac{r_2}{\hat{\alpha}_{2_{MLr}}} - \frac{r_2 y_{r_2}^{\hat{\alpha}_{2_{MLr}}} e^{-y_{r_2}^{\hat{\alpha}_{2_{MLr}}}} \ln y_{r_2}}{u(y_{r_2}) \ln u(y_{r_2})} + \sum_{i=1}^{r_2} \ln y_i \left(1 - y_i^{\hat{\alpha}_{2_{MLr}}} - \frac{y_i^{\hat{\alpha}_{2_{MLr}}} e^{-y_i^{\hat{\alpha}_{2_{MLr}}}}}{u(y_i)}\right) = 0. \qquad (4.142)$$

(٤-٤-٢-١-٢-٢) تقدير بييز للنموذج $S_1 = P(Y < X)$

(٤-٤-٢-١-٢-٢-١) تقدير بييز للنموذج S_1 باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعالم $(\alpha_i, \theta_i), i = 1, 2$

مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يكون على الـصورة (4.128) حيث $\hat{S}_{1_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_1 والذي يأخذ الشكل (4.140) و

$$E(S_1 \mid \underline{x},\underline{y}) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \alpha_1\theta_1 x^{\alpha_1-1} e^{-x^{\alpha_1}} (1-e^{-x^{\alpha_1}})^{\theta_1-1}$$
$$(1-e^{-x^{\alpha_2}})^{\theta_2}\, \pi_3^{**}(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y}) dx\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2, \qquad (4.143)$$

حيث

$$\pi_3^{**}(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2\,|\,\underline{x},\underline{y}) = D_3^{-1}[\prod_{i=1}^{2}\ \alpha_i^{\ r_i+d_i-v_i-1}\theta_i^{\ r_i+v_i-1}\ e^{\ -(\alpha_i^2+b_i\theta_i)/b_i\alpha_i}\ ]$$

$$\left(\prod_{i=1}^{r_1} v\,(x_i\,)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v\,(y_i\,)\right) e^{\ (\ln u\,(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u\,(y_{r_2}))\theta_2}, \tag{4.144}$$

$$D_3\ = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\ [\prod_{i=1}^{2}\ \alpha_i^{\ r_i+d_i-v_i-1}\theta_i^{\ r_i+v_i-1}\ e^{\ -(\alpha_i^2+b_i\theta_i)/b_i\alpha_i}\ ]$$

$$\left(\prod_{i=1}^{r_1} v\,(x_i\,)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v\,(y_i\,)\right) e^{\ (\ln u\,(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u\,(y_{r_2}))\theta_2} d\,\alpha_1\,d\,\alpha_2\,d\,\theta_1\,d\,\theta_2. \tag{4.145}$$

بالتعويض من (4.144) في (4.143) نحصل على

$$E\,(S_1\,|\,\underline{x},\underline{y}\,) = D_3^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\ \alpha_1\theta_1 x^{\ \alpha_1-1}e^{-x^{\ \alpha_1}}\,(1-e^{-x^{\ \alpha_1}}\ )^{\theta_1-1}(1-e^{-x^{\ \alpha_2}}\ )^{\theta_2}$$

$$[\prod_{i=1}^{2}\ \alpha_i^{\ r_i+d_i-v_i-1}\theta_i^{\ r_i+v_i-1}\ e^{\ -(\alpha_i^2+b_i\theta_i)/b_i\alpha_i}\ ] \tag{4.146}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{r_1} v\,(x_i\,)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v\,(y_i\,)\right) e^{\ (\ln u\,(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u\,(y_{r_2}))\theta_2} dx\,d\,\alpha_1\,d\,\alpha_2\,d\,\theta_1\,d\,\theta_2.$$

أما مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فنحصل عليـه من العلاقة (4.133) حيث $\hat{S}_{1_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_1 والـذي يأخـذ الـشكل (4.113) وكذلك

$$E\,(e^{-aS_1}\,|\,\underline{x},\underline{y}\,) = D_3\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\ [\prod_{i=1}^{2}\ \alpha_i^{\ r_i+d_i-v_i-1}\theta_i^{\ r_i+v_i-1}\ e^{\ -(\alpha_i^2+b_i\theta_i)/b_i\alpha_i}\ ]e^{-aS_1}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{r_1} v\,(x_i\,)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v\,(y_i\,)\right) e^{\ \ln u\,(x_{r_1})\theta_1+\ln u\,(y_{r_2})\theta_2} d\,\alpha_1\,d\,\alpha_2\,d\,\theta_1\,d\,\theta_2. \tag{4.147}$$

(٤-٢-١-٢-٢-٢) تقدير بييز للنموذج S_1 باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعالم $(\alpha_i\,,\theta_i\,), i\ = 1,2$

مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يكـون علـى الصورة (4.128) حيث $\hat{S}_{1_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_1 والذي يأخذ الشكل (4.140) وكذلك

$$E\,(S_1\,|\,\underline{x},\underline{y}\,) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1}\int_0^{\infty}\ \alpha_1\theta_1 x^{\ \alpha_1-1}e^{-x^{\ \alpha_1}}\,(1-e^{-x^{\ \alpha_1}}\ )^{\theta_1-1}$$

$$(1-e^{-x^{\ \alpha_2}}\ )^{\theta_2}\ \pi_4^{**}(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2\,|\,\underline{x},\underline{y}\,)dx\ d\,\alpha_1\,d\,\alpha_2\ d\,\theta_1\,d\,\theta_2, \tag{4.148}$$

حيث

$$\pi_4^{**}(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2 \mid \underline{x},\underline{y}) = D_4^{-1}[\prod_{i=1}^{2} \alpha_i^{\ r_i}\theta_i^{\ r_i-1}]$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right) e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2}, \quad (4.149)$$

$$D_4 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1} [\prod_{i=1}^{2} \alpha_i^{\ r_i}\theta_i^{\ r_i-1}]$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right) e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2} d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2. \quad (4.150)$$

بالتعويض من (4.149) في (4.148) نحصل على

$$E(S_1 \mid \underline{x},\underline{y}) = D_4^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1}\int_0^{\infty} \alpha_1\theta_1 x^{\alpha_1-1}e^{-x^{\alpha_1}}(1-e^{-x^{\alpha_1}})^{\theta_1-1}$$
$$(1-e^{-x^{\alpha_2}})^{\theta_2}[\prod_{i=1}^{2} \alpha_i^{\ r_i}\theta_i^{\ r_i-1}] \quad (4.151)$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right) e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2}\, dx\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2.$$

أما مقدر بييز للنموذج S_1 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيكون على الصورة (4.133) حيث $\hat{S}_{1_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_1 والذي يأخذ الشكل (4.140) وكذلك

$$E(e^{-aS_1} \mid \underline{x},\underline{y}) = D_4^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1}\int_0^{\infty} \alpha_1\theta_1 x^{\alpha_1-1}e^{-x^{\alpha_1}}(1-e^{-x^{\alpha_1}})^{\theta_1-1}$$
$$(1-e^{-x^{\alpha_2}})^{\theta_2}[\prod_{i=1}^{2} \alpha_i^{\ r_i}\theta_i^{\ r_i-1}]e^{-aS_1} \quad (4.152)$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right) e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2}\, dx\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\theta_1\, d\theta_2.$$

(٤-٤-٢-٢) تقدير النموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$

(٤-٤-٢-٢-١) التقدير عندما $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ وتكون معلومة

(٤-٤-٢-٢-١-١) تقدير الإمكان الأكبر للنموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$

نحصل على مقدر الإمكان الأكبر لنموذج الإجهاد – القوة S_2 من العلاقة (4.39) فيأخذ الصورة:

$$\hat{S}_{2_{MLr}} = \frac{\hat{\theta}_{2_{MLr}}}{\hat{\theta}_{1_{MLr}}+\hat{\theta}_{2_{MLr}}} - \frac{\hat{\theta}_{2_{MLr}}}{\hat{\theta}_{1_{MLr}}+\hat{\theta}_{2_{MLr}}+\hat{\theta}_{3_{MLr}}}, \quad (4.153)$$

حيث $\hat{\theta}_{1_{MLr}}, \hat{\theta}_{2_{MLr}}$ سبق الحصول عليهما في العلاقة (4.127) وبالمثل نحصل على $\hat{\theta}_{3_{MLr}}$ فتكون على الصورة:

$$\hat{\theta}_{3_{MLr}} = -\frac{r_3}{\ln u(z_{r_3})} \qquad (4.154)$$

(٤-٤-٢-٢-١-٢) تقدير بييز للنموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$

(٤-٤-٢-٢-١-٢-١) تقدير بييز للنموذج S_2 باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعالم $\theta_i, \, i = 1,2,3$

مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة نحصل عليه من العلاقة (4.46) فيأخذ الشكل التالي:

$$\hat{S}_{2_{BSr}} = \omega \hat{S}_{2_{MLr}} + (1-\omega) E(S_2 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}), \qquad (4.155)$$

حيث $\hat{S}_{2_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر لـ S_2 والمعطى بالعلاقة (4.153) وكذلك

$$E(S_2 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} - \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \right] \pi_1^{**}(\theta_1, \theta_2, \theta_3 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\theta_3, \qquad (4.156)$$

حيث

$$\pi_1^{**}(\theta_1, \theta_2, \theta_3 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = D_5^{-1} [\prod_{i=1}^{3} \theta_i^{r_i + \nu_i - 1} e^{-\delta_i \theta_i}] e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1 + (\ln u(y_{r_2}))\theta_2 + (\ln u(z_{r_3}))\theta_3}, \qquad (4.157)$$

$$D_5 = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty [\prod_{i=1}^{3} \theta_i^{r_i + \nu_i - 1} e^{-\delta_i \theta_i}] e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1 + (\ln u(y_{r_2}))\theta_2 + (\ln u(z_{r_3}))\theta_3} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \qquad (4.158)$$

بالتعويض من (4.157) في (4.156) نحصل على

$$E(S_2 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = D_5^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} - \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \right] [\prod_{i=1}^{3} \theta_i^{r_i + \nu_i - 1} e^{-\delta_i \theta_i}] e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1 + (\ln u(y_{r_2}))\theta_2 + (\ln u(z_{r_3}))\theta_3} d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\theta_3. \qquad (4.159)$$

أما مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فنحصل عليه من العلاقة (4.48) فيكون على الصورة:

$$\hat{S}_{2_{BLr}} = -\frac{1}{a} \ln[\omega e^{-a\hat{S}_{2_{MLr}}} + (1-\omega) E(e^{-aS_2} \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})], \qquad (4.160)$$

حيث $\hat{S}_{2_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر لـ S_2 والمعطى بالعلاقة (4.153) وكذلك

$$E(e^{-aS_2} \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = D_5^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty [\prod_{i=1}^{3}\theta_i^{r_i+\nu_i-1}e^{-\delta_i\theta_i}]e^{-aS_2} \qquad (4.161)$$
$$e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2+(\ln u(z_{r_3}))\theta_3}d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3.$$

(٤-٤-٢-٢-١-٢-٢) تقدير بييز للنموذج S_2 باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعالم $\theta_i,\ i=1,2,3$

مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة نحصل عليه من العلاقة (4.155) حيث $\hat{S}_{2_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر لـ S_2 والمعطى بالعلاقة (4.153) وكذلك

$$E(S_2 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2} - \frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2+\theta_3}\right] \qquad (4.162)$$
$$\pi_2^{**}(\theta_1,\theta_2,\theta_3 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z})\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3,$$

حيث

$$\pi_2^{**}(\theta_1,\theta_2,\theta_3 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = D_6^{-1}[\prod_{i=1}^{3}\theta_i^{r_i-1}]e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2+(\ln u(z_{r_3}))\theta_3}, \qquad (4.163)$$

$$D_6 = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty [\prod_{i=1}^{3}\theta_i^{r_i-1}]e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2+(\ln u(z_{r_3}))\theta_3}d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3, \qquad (4.164)$$

بالتعويض من (4.163) في (4.162) نحصل على

$$E(S_2 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = D_6^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \left[\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2} - \frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2+\theta_3}\right][\prod_{i=1}^{3}\theta_i^{r_i-1}] \qquad (4.165)$$
$$e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2+(\ln u(z_{r_3}))\theta_3}\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3.$$

أما مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيكون على الصورة (4.160) حيث $\hat{S}_{2_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر لـ S_2 والمعطى بالعلاقة (4.153) و

$$E(e^{-aS_2} \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = D_6^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty [\prod_{i=1}^{3}\theta_i^{r_i-1}]e^{-aS_2} \qquad (4.166)$$
$$e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2+(\ln u(z_{r_3}))\theta_3}\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3.$$

(٤-٤-٢-٢-٢) التقدير عندما $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$

(٤-٤-٢-٢-٢-١) تقدير الإمكان الأكبر للنموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$

في هذه الحالة يعطى مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_2 بالمعادلة (4.58) فيكون على الصورة:

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_{2_{MLr}} = \alpha_{2_{MLr}}\,\theta_{2_{MLr}} & [\int_0^\infty y^{\hat{\alpha}_{2MLr}-1} e^{-y^{\hat{\alpha}_{2MLr}}} (1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{1MLr}}})^{\hat{\theta}_{1MLr}} (1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{2MLr}}})^{\hat{\theta}_{2MLr}-1} dy \\
& -\int_0^\infty y^{\alpha_{2MLr}-1} e^{-y^{\hat{\alpha}_{2MLr}}} (1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{1MLr}}})^{\hat{\theta}_{1MLr}} (1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{2MLr}}})^{\hat{\theta}_{2MLr}-1} (1-e^{-y^{\hat{\alpha}_{3MLr}}})^{\hat{\theta}_{3MLr}} dy\ ]
\end{aligned} \qquad (4.167)
$$

حيث $\hat{\theta}_{1_{MLr}}, \hat{\theta}_{2_{MLr}}$ سبق الحصول عليها في العلاقة (4.127)، و $\hat{\alpha}_{1_{MLr}}, \hat{\alpha}_{2_{MLr}}$ سبق الحصول عليهما في العلاقات (4.41)،(4.42) ونحصل على $\hat{\alpha}_{3_{MLr}}, \hat{\theta}_{3_{MLr}}$ بالمثل من المعادلتين الآتيتين كما يلي:

$$
\hat{\theta}_{3_{MLr}} = -\frac{r_3}{\ln u(z_{r_3})}, \qquad (4.168)
$$

$$
\frac{r_3}{\hat{\alpha}_{3_{MLr}}} - \frac{r_3\, z_{r_3}^{\hat{\alpha}_{3_{MLr}}} e^{-z_{r_3}^{\hat{\alpha}_{3_{MLr}}}} \ln z_{r_3}}{u(z_{r_3}) \ln u(z_{r_3})} + \sum_{i=1}^{r_3} \ln z_i \left(1 - z_i^{\hat{\alpha}_{3_{MLr}}} - \frac{z_i^{\hat{\alpha}_{3_{MLr}}} e^{-z_i^{\hat{\alpha}_{3_{MLr}}}}}{u(z_i)} \right) = 0. \qquad (4.169)
$$

(٤-٤-٢-٢-٢-٢) تقدير بييز للنموذج $S_2 = P(X < Y < Z)$

(٤-٤-٢-٢-٢-٢-١) تقدير بييز للنموذج S_2 باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعالم $(\alpha_i, \theta_i), i = 1,2,3$

مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة يكون على الصورة (4.155) حيث $\hat{S}_{1_{MLr}}$ هو مقدرالإمكان الأكبر للدالة S_2 والذي يأخذ الشكل (4.167) و

$$
\begin{aligned}
E(S_2 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha_2\theta_2 [\int_0^\infty & y^{\alpha_2-1} e^{-y^{\alpha_2}} (1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1} \\
(1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1} dy - \int_0^\infty & y^{\alpha_2-1} e^{-y^{\alpha_2}} (1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1} (1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1} \\
(1-e^{-y^{\alpha_3}})^{\theta_3} dy\ ] & \pi_3^{**}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3 \mid \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) \\
& d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\theta_3,
\end{aligned} \qquad (4.170)
$$

حيث

$$
\begin{aligned}
\pi_3^{**}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3 \mid \underline{x}, \underline{y}, z) = D_7^{-1} & [\prod_{i=1}^{3} \alpha_i^{\,r_i+d_i-\nu_i-1} \theta_i^{\,r_i+\nu_i-1} e^{-(\alpha_i^2+b_i\theta_i)/b_i\alpha_i}] \\
\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3} v(z_i)\right) & e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1 + (\ln u(y_{r_2}))\theta_2 + (\ln u(z_{r_3}))\theta_3},
\end{aligned} \qquad (4.171)
$$

$$
\begin{aligned}
D_7 = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty & [\prod_{i=1}^{3} \alpha_i^{\,r_i+d_i-\nu_i-1} \theta_i^{\,r_i+\nu_i-1} e^{-(\alpha_i^2+b_i\theta_i)/b_i\alpha_i}] \\
\left(\prod_{i=1}^{r_1} v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2} v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3} v(z_i)\right) & e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1 + (\ln u(y_{r_2}))\theta_2 + (\ln u(z_{r_3}))\theta_3} \\
& d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\theta_3,
\end{aligned} \qquad (4.172)
$$

بالتعويض من (4.171) في (4.170) نحصل على

$$E(S_2 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = D_7^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha_2\theta_2[\int_0^\infty y^{\alpha_2-1}e^{-y^{\alpha_2}}(1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1} (1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1}dy - \int_0^\infty y^{\alpha_2-1}e^{-y^{\alpha_2}}(1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1}(1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1} (1-e^{-y^{\alpha_3}})^{\theta_3}dy][\prod_{i=1}^{3}\alpha_i^{r_i+d_i-\nu_i-1}\theta_i^{r_i+\nu_i-1}e^{-(\alpha_i^2+b_i\theta_i)/b_i\alpha_i}] \left(\prod_{i=1}^{r_1}v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2}v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3}v(z_i)\right) e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2+(\ln u(z_{r_3}))\theta_3}d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3 \quad (4.173)$$

أما مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فنحصل عليه من العلاقة (4.160) حيث $\hat{S}_{2_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_2 والـذي يأخـذ الـشكل (4.167) وكذلك

$$E(e^{-aS_2} \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = D_7^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty [\prod_{i=1}^{3}\alpha_i^{r_i+d_i-\nu_i-1}\theta_i^{r_i+\nu_i-1} e^{-(\alpha_i^2+b_i\theta_i)/b_i\alpha_i}]e^{-aS_2}\left(\prod_{i=1}^{r_1}v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2}v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3}v(z_i)\right) e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2+(\ln u(z_{r_3}))\theta_3}d\alpha_1\,d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1\,d\theta_2 d\theta_3 \quad (4.174)$$

(٤-٤-٢-٢-٢-٢-٢) تقدير بييز للنموذج S_2 باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعالم $(\alpha_i,\theta_i), i=1,2,3$

مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنـة يكـون علـى الصورة (4.155) حيث $\hat{S}_{2_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للدالة S_2 والذي يأخذ الشكل (4.167) وكذلك

$$E(S_2 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{c_3}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1} \alpha_2\theta_2[\int_0^\infty y^{\alpha_2-1}e^{-y^{\alpha_2}}(1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1} (1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1}dy - \int_0^\infty y^{\alpha_2-1}e^{-y^{\alpha_2}}(1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1}(1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1} (1-e^{-y^{\alpha_3}})^{\theta_3}dy]\,\pi_4^{**}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3 \mid \underline{x},\underline{y},\underline{z}) d\alpha_1\,d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1\,d\theta_2 d\theta_3, \quad (4.175)$$

حيث

$$\pi_4^{**}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = D_8^{-1}[\prod_{i=1}^{3}\alpha_i^{\,r_i}\theta_i^{\,r_i-1}]\left(\prod_{i=1}^{r_1}v(x_i)\right)$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r_2}v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3}v(z_i)\right)e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2+(\ln u(z_{r_3}))\theta_3}, \quad (4.176)$$

و

$$D_8 = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{c_3}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1}[\prod_{i=1}^{3}\alpha_i^{\,r_i}\theta_i^{\,r_i-1}]\left(\prod_{i=1}^{r_1}v(x_i)\right)$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r_2}v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3}v(z_i)\right)e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2+(\ln u(z_{r_3}))\theta_3} \quad (4.177)$$
$$d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3\,d\theta_1\,d\theta_2 d\theta_3.$$

بالتعويض من (4.176) في (4.175) نحصل على

$$E(S_2\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = D_8^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{c_3}\int_0^{c_2}\int_0^{c_1}\alpha_2\theta_2[\int_0^\infty y^{\alpha_2-1}e^{-y^{\alpha_2}}(1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1}$$
$$(1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1}dy - \int_0^\infty y^{\alpha_2-1}e^{-y^{\alpha_2}}(1-e^{-y^{\alpha_1}})^{\theta_1}(1-e^{-y^{\alpha_2}})^{\theta_2-1}$$
$$(1-e^{-y^{\alpha_3}})^{\theta_3}dy\,]\,[\prod_{i=1}^{3}\alpha_i^{\,r_i}\theta_i^{\,r_i-1}]\left(\prod_{i=1}^{r_1}v(x_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_2}v(y_i)\right) \quad (4.178)$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r_3}v(z_i)\right)e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2+(\ln u(z_{r_3}))\theta_3}d\alpha_1\,d\alpha_2 d\alpha_3 d\theta_1\,d\theta_2 d\theta_3$$

أما مقدر بييز للنموذج S_2 اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة فيكون على الصورة (4.160) حيث $\hat{S}_{2_{MLr}}$ هو مقدر الإمكان الأكبر للنموذج S_2 والذي يأخذ الشكل (4.167) وكذلك

$$E(e^{-aS_2}\,|\,\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = D_8^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty[\prod_{i=1}^{3}\alpha_i^{\,r_i}\theta_i^{\,r_i-1}]e^{-aS_2}\left(\prod_{i=1}^{r_1}v(x_i)\right)$$
$$\left(\prod_{i=1}^{r_2}v(y_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{r_3}v(z_i)\right)e^{(\ln u(x_{r_1}))\theta_1+(\ln u(y_{r_2}))\theta_2+(\ln u(z_{r_3}))\theta_3} \quad (4.179)$$
$$d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\theta_3$$

يتضح من العلاقات السابقة أن مقدرات بييز اعتمادا على القيم المسجلة الدنيا في حالة عدم معلومية المعلمتين تعتمد على تكاملات معقدة يصعب حسابها بالطرق التحليلية لذلك سوف نلجأ لاستخدام طرق سلسلة ماركوف (MCMC) لحساب التقديرات في هذه الحالة.

(٤-٥) دراسة المحاكاة Simulation Study

تم توليد مجموعة من العينات المراقبة تتابعيا بأحجام مختلفة وتم توليد عينات مـن قـيم مسجلة دنيا بأحجام مختلفة أيضا باستخدام طرق التوليد التي تم عرضها في الفصل الثاني مع العلاقة (2.63) (بنفس الأسلوب المتبع في الفصل الثالث) وتم حـساب التقـديرات المختلفـة لنموذجي الإجهاد – القوة S_1,S_2 وتم عمل المقارنات طبقا للخطوات التالية:

١- تم توليد عينات مراقبة تتابعيا من توزيع وايبل الأسي بالمعالم $\theta_i, i = 1,2,3$ فـي حالة معلومية المعلمة α وبالمعالم $(\alpha_i, \theta_i), i = 1,2,3$ في حالة عـدم معلوميـة معلمتي التوزيع بأحجام مختلفة وباستخدام أنظمة مراقبة مختلفة (تم عرضها فـي الجدول (٤-١)) كما تم توليد عينات من قيم مسجلة دنيا من توزيع وايبل الأسـي باستخدام نفس قيم المعالم أعلاه بأحجام مختلفة.

جدول (٤-١): أنظمة المراقبة المختلفة التي تم استخدامها في هذا الفصل

CS	*n*	*r*	*R*
i	25	20	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
ii	35	30	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0,0)
iii	40	35	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0,0)
iv	30	25	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
v	80	75	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,2,0,0,0,0 ,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
vi	70	60	(0,0,0,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0, 0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,0,0 ,0,0,0)
vii	20	15	(0,0,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
viii	30	20	(0,0,0,0,5,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,2,0,0,0)
ix	65	60	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, 0,0,5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0 ,0,0,0)

٢- تم حساب تقديرات الإمكان الأكبر لنموذجي الإجهاد – القوة S_1,S_2 في حالة كون أحد المعالم متساوية ومعلومة وفي حالة عدم معلومية جميع المعالم باستخدام نتائج البنود (٤-٤-١-١-١-١)،(٤-٤-١-١-٢-١)،(٤-٤-١-٢-١-١)،(٤-٤-١-٢-٢-١) في حالة العينات المراقبة، ونتائج البنود (٤-٤-٢-١-١-١)،(٤-٤-٢-١-٢-١)،(٤-٤-٢-٢-١-١)،(٤-٤-٢-٢-٢-١) في حالة القيم المسجلة الدنيا.

٣- تم حساب تقديرات بييز اعتمادا على دالة الخسارة المتماثلة BSEL ودالة الخسارة غير المتماثلة BLINEX عند أكثر من قيمة لمعلمة الشكل a، اعتمادا على التوزيعات القبلية المعلمة وغير المعلمة التي تم افتراضها في هذا الفصل كمايلي:

- **تقديرات بييز اعتمادا على التوزيعات القبلية المعلمة:**

- تم اختيار قيم معالم التوزيعين القبليين بحيث يكون متوسط التوزيع لكل معلمة قريب من قيمة المعلمة التي تم توليدها باستخدامه والتي أعطت أفضل شكل لدالة كثافة الاحتمال.

أولا: بالنسبة للنموذج S_1:

- في حالة معلومية المعلمة $\alpha = 2$ تم توليد قيمتين للمعلمة θ على النحو التالي:

$$\theta_1 = 4.0620 \sim \Gamma(6,2)$$
$$\theta_2 = 2.0286 \sim \Gamma(8,4)$$

و تم حساب تقديرات بييز المختلفة باستخدام نتائج البند (٤-٤-١-١-٢-١) للعينات المراقبة تتابعيا ونتائج البند (٤-٤-٢-١-٢-١) للقيم المسجلة الدنيا.

- في حالة عدم معلومية معلمتي التوزيع تم توليد قيم المعلمتين على النحو التالي:

$$\alpha_1 = 2.8863 \sim \Gamma(3,1)\ , \qquad \theta_1 = 3.7209 \sim \Gamma(2,1/\alpha_1),$$
$$\alpha_2 = 1.9071 \sim \Gamma(2,1)\ , \qquad \theta_2 = 4.8675 \sim \Gamma(2,1/\alpha_2).$$

و تم حساب تقدرات بييز المختلفة باستخدام نتائج البند (٤-٤-١-٢-٢-١) للعينات المراقبة تتابعيأ ونتائج البند (٤-٤-٢-٢-٢-١) للقيم المسجلة الدنيا.

ثانيا: بالنسبة للنموذج S_2:

- في حالة معلومية المعلمة $\alpha = 2$ تم توليد ثلاث قيم للمعلمة θ على النحو التالي:

$$\theta_1 = 2.5254 \sim \Gamma(6,3),$$
$$\theta_2 = 1.8732 \sim \Gamma(4,2),$$
$$\theta_3 = 3.6026 \sim \Gamma(9,3)$$

و تم حساب تقديرات بييز المختلفة باستخدام نتـائج البنـد (٤-٤-١-٢-١-٢-١) للعينـات المراقبة تتابعيا ونتائج البند (٤-٤-٢-٢-١-٢-١) للقيم المسجلة الدنيا.

- في حالة عدم معلومية معلمتي التوزيع تم توليد قيم المعلمتين على النحو التالي:

$$\alpha_1 = 1.7950 \sim \Gamma(2,1)\ , \quad \theta_1 = 3.1382 \sim \Gamma(2,1/\alpha_1),$$
$$\alpha_2 = 1.9353 \sim \Gamma(2,2)\ , \quad \theta_2 = 3.2129 \sim \Gamma(2,1/\alpha_2),$$
$$\alpha_3 = 1.8895 \sim \Gamma(3,2)\ , \quad \theta_3 = 4.7112 \sim \Gamma(2,1/\alpha_3).$$

و تم حساب تقديرات بييز باستخدام نتائج البنـد (٤-٤-١-٢-٢-٢-١) للعينـات المراقبـة ونتائج البند (٤-٤-٢-٢-٢-٢-١) للقيم المسجلة الدنيا.

- **تقديرات بييز اعتمادا على التوزيعات القبلية غير المعلمة:**

أولا: بالنسبة للنموذج S_1:

- في حالة معلومية المعلمة $\alpha = 2$ تم اعتبار قيمتين للمعلمة θ وهي:

$$\theta_1 = 2.5\ , \theta_2 = 1.5$$

وتم حساب تقديرات بييز باستخدام نتائج البند (٤-٤-١-١-١-٢-٢) للعينات المراقبة تتابعيا ونتائج البند (٤-٤-٢-١-١-٢-٢) للقيم المسجلة الدنيا.

- وفي حالة عدم معلومية المعلمتين تم اعتبار قيمتين لكلا المعلمتين على النحو التالي:

$$\alpha_1 = 2.5\ ,\ \theta_1 = 2,$$
$$\alpha_2 = 2\ ,\ \theta_2 = 1.5.$$

وتم حساب تقديرات بييز باستخدام نتائج البند (٤-٤-١-١-٢-٢-٢) للعينات المراقبة تتابعيا ونتائج البند (٤-٤-٢-١-٢-٢-٢) للقيم المسجلة الدنيا.

- **ثانيا: بالنسبة للنموذج S_2:**

- في حالة معلومية المعلمة $\alpha = 2.5$ تم اعتبارثلاث قيم للمعلمة θ وهي:

$$\theta_1 = 2\ , \theta_2 = 1.5\ , \theta_3 = 2.5$$

وتم حساب تقديرات بييز باستخدام نتائج البند (٤-٤-١-٢-١-٢-٢) للعينات المراقبة تتابعيا ونتائج البند (٤-٤-٢-٢-١-٢-٢) للقيم المسجلة الدنيا.

- وفي حالة عدم معلومية المعلمتين تم اعتبارثلاث قيم لكلا المعلمتين على النحو التالي:

$$\alpha_1 = 2.5\ ,\ \ \theta_1 = 1.5,$$
$$\alpha_2 = 2\ ,\ \ \theta_2 = 1.5,$$
$$\alpha_3 = 2.5\ ,\ \ \theta_3 = 2,$$

وتم حساب تقديرات بييز باستخدام نتائج البند (٤-٤-١-٢-٢-٢-٢) للعينات المراقبة ونتائج البند (٤-٤-٢-٢-٢-٢-٢) للقيم المسجلة الدنيا.

٤- الخطوات من ٢ إلى ٣ تم تكرارها $(T = 1000)$ مرة في حالـة العينـات المراقبـة تتابعيا كما تم تكرارها $(T = 500)$ مرة في حالة القيم المسجلة الدنيا، وذلك لكل حالة من الحالات المقابلة لحجم العينة وباعتبار معلومية أحد معلمتـي التوزيـع أو عـدم معلومية المعلمتين وباستخدام التوزيعات القبلية المعلمة وغير المعلمة.

٥- تم حساب متوسط التقديرات AV ، ومخاطرة بييز المقدرة ER لمختلـف التقـديرات حيث تم اعتبار قيم المعالم المفترضة في كل حالة وقيم دالتـي الـصلاحية ومعـدل التعطل المقابلة عند الزمن $t = 1$ هي القيم المضبوطة.

وذلك باستخدام العلاقات التالية (3.149).

النتائج العددية للحسابات المختلفة تم عرضها في الجداول (من (٤-٢) إلى (٤-١٧)).

جدول (٤-٢): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_1 باستخدام توزيـع قبلـي معلـم للمعلمة θ اعتمادا على عينات مراقبة تتابعيا من النوع الثاني حيث $\omega = 0.5$.

CS(1)	CS(2)		ML	Bayes			
			$S_{1_{ML}}$	$S_{1_{BS}}$	$S_{1_{BL}}$		
					$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
i	ii	*AV*	0.6586	0.6432	0.6461	0.6428	0 .6403
		ER	0.0030	0.0024	0.0022	0.0024	0.0026
iii	iv	*AV*	0.6557	0.6484	0.6508	0.6484	0.6459
		ER	0.0028	0.0020	0.0019	0.0020	0.0021
v	vi	*AV*	0.6701	0.6640	0.6652	0.6654	0.6628
		ER	0.0014	0.0012	0.0013	0.0013	0.0012

جدول (٤-٣): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_1 باستخدام توزيـع قبلـي معلـم للمعلمة θ اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\omega = 0.5$.

r_1 r_2		ML	Bayes					
		$S_{1_{ML}}$	$S_{1_{BS}}$	$S_{1_{BL}}$				
				$a=-5$	$a=-2$	$a=2$	$a=3$	$a=5$
7 5	*AV*	0.1637	0.6197	0.6393	0.6277	0.6114	0.6072	0.5986
	ER	0.0219	0.0046	0.0029	0.0038	0.0055	0.0062	0.0072
6 8	*AV*	0.6801	0.6272	0.6455	0.6347	0.6194	0.6154	0.6072
	ER	0.0145	0.0040	0.0027	0.0034	0.0047	0.0052	0.0061
10 7	*AV*	0.6645	0.6425	0.6583	0.6490	0.6359	0.6325	0.6255
	ER	0.0102	0.0026	0.0019	0.0022	0.0030	0.0033	0.0038

جدول (٤-٤): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_1 باستخدام توزيع قبلي غير معلم للمعلمة θ اعتمادا على عينات مراقبة تتابعيا من النوع الثاني حيث $\omega = 0.5$.

CS(1)	CS(2)		ML	Bayes			
			$S_{1_{ML}}$	$S_{1_{BS}}$	$S_{1_{BL}}$		
					$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
i	ii	*AV*	0.6293	0.6261	0.6297	0.6272	0 .6224
		ER	0.0035	0.0034	0.0034	0.0033	0.0035
iii	iv	*AV*	0.6220	0.6213	0.6244	0.6213	0.6181
		ER	0.0033	0.0032	0.0032	0.0032	0.0033
v	vi	*AV*	0.6264	0.6258	0.6273	0.6271	0.6243
		ER	0.0018	0.0018	0.0017	0.0019	0.0018

جدول (٤-٥): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_1 باستخدام توزيع قبلي غير معلم للمعلمة θ اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\omega = 0.5$.

r_1 r_2		ML	Bayes					
		$S_{1_{ML}}$	$S_{1_{BS}}$	$S_{1_{BL}}$				
				$a=-5$	$a=-2$	$a=2$	$a=3$	$a=5$
7 5	AV	0.5758	0.5771	0.6162	0.5930	0.5610	0.5529	0.5366
	ER	0.0291	0.0257	0.0213	0.0237	0.0280	0.0293	0.0320
6 8	AV	0.6616	0.6491	0.6796	0.6619	0.6355	0.6284	0.6136
	ER	0.0175	0.0156	0.0161	0.0156	0.0158	0.0160	0.0167
10 7	AV	0.5822	0.5830	0.6128	0.5951	0.5707	0.5645	0.5521
	ER	0.0184	0.0167	0.0138	0.0154	0.0182	0.0191	0.0209

جدول (٤-٦): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_1 باستخدام توزيعات قبلية معلمة لمعلمتي التوزيع α,θ اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\omega = 0.5$.

CS(1)	CS(2)		ML	Baye(MCMC)			
			$S_{1_{ML}}$	$S_{1_{BS}}$	$S_{1_{BL}}$		
					$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
i	ii	AV	0.3796	0.3806	0.3807	0.3806	0 .3804
		ER	0.0053	0.0051	0.0051	0.0051	0.0051
iii	iv	AV	0.3710	0.3801	0.3802	0.3801	0.3710
		ER	0.0063	0.0062	0.0064	0.0062	0.0063
v	vi	AV	0.3752	0.3759	0.3760	0.3759	0.3758
		ER	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028

جدول (٤-٧): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرةأ للنموذج S_1 باستخدام توزيعات قبلية معلمة لمعلمتي التوزيع α,θ اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\omega = 0.5$.

r_1 r_2		ML	Bayes					
		$S_{1_{ML}}$	$S_{1_{BS}}$	$S_{1_{BL}}$				
				$a=-5$	$a=-2$	$a=2$	$a=3$	$a=5$
7 5	AV	0.4921	0.5047	0.5387	0.5184	0.4911	0.4843	0.4712
	ER	0.0198	0.0203	0.0296	0.0238	0.0173	0.0159	0.0135
6 8	AV	0.4651	0.4689	0.4869	0.4757	0.4622	0.4589	0.4523
	ER	0.0128	0.0124	0.0157	0.0136	0.0113	0.0107	0.0097
10 7	AV	0.4721	0.4790	0.4980	0.4862	0.4721	0.4687	0.4618
	ER	0.0171	0.0166	0.0203	0.0179	0.0153	0.0147	0.0135

جدول (٤-٨): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_1 باستخدام توزيعات قبليـة غيـر معلمة لمعلمتي التوزيع α,θ اعتمادا على عينات مراقبة تتابعيا من النوع الثاني حيث $\omega = 0.5$.

CS(1)	CS(2)		ML	Baye(MCMC)			
			$S_{1_{ML}}$	$S_{1_{BS}}$	$S_{1_{BL}}$		
					$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
i	ii	AV	0.7965	0.8023	0.8068	0.8023	0 .7910
		ER	0.0064	0.0064	0.0064	0.0064	0.0063
iii	iv	AV	0.8130	0.8187	0.8193	0.8187	0.8170
		ER	0.0120	0.0127	0.0128	0.0127	0.0119
v	vi	AV	0.7970	0.8015	0.8021	0.8015	0.8001
		ER	0.0017	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010

جدول (٤-٩): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_1 باستخدام توزيعات قبليـة غيـر معلمة لمعلمتي التوزيع α,θ اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\omega = 0.5$.

r_1 r_2		ML	Baye(MCMC)					
		$S_{1_{ML}}$	$S_{1_{BS}}$	$S_{1_{BL}}$				
				$a=-5$	$a=-2$	$a=2$	$a=3$	$a=5$
7 5	AV	0.6029	0.6009	0.6154	0.6067	0.5948	0.5916	0.5849
	ER	0.0606	0.0620	0.0551	0.0592	0.0650	0.0665	0.0700
6 8	AV	0.6494	0.6535	0.6673	0.6590	0.6479	0.6449	0.6389
	ER	0.0394	0.0380	0.0331	0.0360	0.0401	0.0412	0.0435
10 7	AV	0.6574	0.6579	0.6711	0.6633	0.6523	0.6494	0.6430
	ER	0.0388	0.0387	0.0341	0.0368	0.0408	0.0419	0.0443

جدول (٤-١٠): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_2 باستخدام توزيع قبلـي معلـم للمعلمة θ اعتمادا على عينات مراقبة تتابعيا من النوع الثاني حيث $\omega = 0.5$.

CS(1)	CS(2)	CS(3)		ML	Bayes			
				$S_{2_{ML}}$	$S_{2_{BS}}$	$S_{2_{BL}}$		
						$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
vii	i	viii	AV	0.1919	0.1978	0.1994	0.1994	0 .1962
			ER	0.0014	0.0007	0.0008	0.0007	0.0007
ii	iv	iii	AV	0.1775	0.1833	0.1843	0.1833	0.1823
			ER	0.0011	0.0006	0.0006	0.0006	0.0007
vi	v	ix	AV	0.1944	0.1954	0.1960	0.1954	0.1948
			ER	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003

جدول (٤-١١): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_2 باستخدام توزيع قبلـي معلـم للمعلمة θ اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\omega = 0.5$.

r_1	r_2	r_3		ML	Bayes					
				$S_{2_{ML}}$	$S_{2_{BS}}$	$S_{2_{BL}}$				
						$a=-5$	$a=-2$	$a=2$	$a=3$	$a=5$
6	8	4	AV	0.2085	0.1987	0.2077	0.2022	0.1954	0.1937	0.1906
			ER	0.0115	0.0012	0.0015	0.0013	0.0012	0.0011	0.0011
10	7	5	AV	0.1963	0.1871	0.1941	0.1899	0.1845	0.1832	0.1806
			ER	0.0056	0.0009	0.0010	0.0009	0.0009	0.0010	0.0010
7	5	3	AV	0.2555	0.2012	0.2101	0.2046	0.1978	0.1961	0.1929
			ER	0.0160	0.0012	0.0015	0.0011	0.0011	0.0010	0.001

جدول (٤-١٢): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_2 باستخدام توزيع قبلـي غيـر معلم للمعلمة θ اعتمادا على عينات مراقبة تتابعيا من النوع الثاني حيث $\omega = 0.5$.

CS(1)	CS(2)	CS(3)		ML	Bayes			
				$S_{2_{ML}}$	$S_{2_{BS}}$	$S_{2_{BL}}$		
						$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
vii	i	viii	AV	0.1755	0.1770	0.1789	0.1770	0 .1751
			ER	0.0022	0.0021	0.0022	0.0021	0.0021
ii	iv	iii	AV	0.1735	0.1737	0.1748	0.1739	0.1726
			ER	0.0009	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009
vi	v	ix	AV	0.1805	0.1807	0.1813	0.1809	0.1801
			ER	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004

جدول (٤-١٣): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_2 باستخدام توزيع قبلـي غيـر معلم للمعلمة θ اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\omega = 0.5$.

r_1	r_2	r_3		ML	Bayes					
				$S_{2_{ML}}$	$S_{2_{BS}}$	$S_{2_{BL}}$				
						$a=-5$	$a=-2$	$a=2$	$a=3$	$a=5$
6	8	4	AV	0.1862	0.1857	0.2050	0.1930	0.1789	0.1757	0.1696
			ER	0.0087	0.0072	0.0090	0.0078	0.0067	0.0065	0.0061
10	7	5	AV	0..2128	0.2050	0.2200	0.2108	0.1995	0.1968	0.1916
			ER	0.0076	0.0063	0.0082	0.0070	0.0057	0.0054	0.0050
7	5	3	AV	0.2133	0.20193	0.2241	0.2104	0.1939	0.1901	0.1827
			ER	0.0141	0.0110	0.0146	0.0123	0.0099	0.0094	0.0085

جدول (٤-١٤): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_2 باستخدام توزيعات قبلية معلمة لمعلمتي التوزيع α,θ اعتمادا على عينات مراقبة تتابعيا من النوع الثاني حيث $\omega = 0.5$.

CS(1)	CS(2)	CS(3)		ML	Baye(MCMC)			
				$S_{2_{ML}}$	$S_{2_{BS}}$	$S_{2_{BL}}$		
						$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
vii	i	viii	AV	0.1418	0.1428	0.1429	0.1428	0 .1428
			ER	0.0032	0.0031	0.0031	0.0031	0.0030
ii	iv	iii	AV	0.1869	0.1584	0.1596	0.1584	0.1572
			ER	0.0017	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008
vi	v	ix	AV	0.1899	0.1897	0.1898	0.1897	0.1896
			ER	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0019

جدول (٤-١٥): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_2 باستخدام توزيعات قبلية معلمة لمعلمتي التوزيع α,θ اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\omega = 0.5$.

r_1 r_2 r_3		ML	Baye(MCMC)					
		$S_{2_{ML}}$	$S_{2_{BS}}$	$S_{2_{BL}}$				
				$a=-5$	$a=-2$	$a=2$	$a=3$	$a=5$
6 8 4	AV	0.1538	0.1585	0.1656	0.1611	0.1562	0.1551	0.1530
	ER	0.0014	0.0012	0.0011	0.0011	0.0012	0.0013	0.0013
10 7 5	AV	0.1549	0.1597	0.1665	0.1623	0.1574	0.1563	0.1542
	ER	0.0022	0.0020	0.0021	0.0020	0.0020	0.0021	0.0021
7 5 3	AV	0.1455	0.1507	0.1576	0.1532	0.1484	0.1473	0.1452
	ER	0.0018	0.0016	0.0014	0.0015	0.0016	0.0017	0.0018

جدول (٤-١٦): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_2 باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة لمعلمتي التوزيع α,θ اعتمادا على عينات مراقبة تتابعيا من النوع الثاني حيث $\omega = 0.5$.

CS(1)	CS(2)	CS(3)		ML	Baye(MCMC)			
				$S_{2_{ML}}$	$S_{2_{BS}}$	$S_{2_{BL}}$		
						$a=-2$	$a=0.001$	$a=2$
vii	i	viii	AV	0.2253	0.2280	0.2281	0.2280	0 .2279
			ER	0.0045	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044
ii	iv	iii	AV	0.1987	0.1996	0.1996	0.1996	0.1995
			ER	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023	0.0022
vi	v	ix	AV	0.2129	0.2114	0.2114	0.2114	0.2113
			ER	0.0010	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008

جدول (٤-١٧): متوسط التقديرات ومخاطرة بييز المقدرة للنموذج S_2 باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة لمعلمتي التوزيع α,θ اعتمادا على قيم مسجلة دنيا حيث $\omega = 0.5$.

r_1 r_2 r_3		*ML* $S_{2_{ML}}$	*Baye(MCMC)* $S_{2_{BS}}$	$S_{2_{BL}}$ $a=-5$	$a=-2$	$a=2$	$a=3$	$a=5$
6 8 4	*AV*	0.1774	0.1720	0.1783	0.1745	0.1696	0.1684	0.1660
	ER	0.0063	0.0051	0.0048	0.0050	0.0052	0.0053	0.0054
10 7 5	*AV*	0.1839	0.1801	0.1857	0.1823	0.1780	0.1770	0.1749
	ER	0.0020	0.0019	0.0016	0.0018	0.0020	0.0021	0.0022
7 5 3	*AV*	0.1791	0.1742	0.1798	0.1764	0.1721	0.1710	0.1690
	ER	0.0047	0.0045	0.0043	0.0044	0.0046	0.0047	0.0048

(٤-٦) التعليق على النتائج **Comments on the Results**

١- اعتمادا على عينة من الإحصاءات المرتبة المعممة تم في هذا الفصل الحصول على مقدرات الإمكان الأكبر ومقدرات بييز لنموذجي الإجهاد – القوة S_1,S_2 باستخدام أكثر من شكل من أشكال التوزيعات القبلية واعتمادا علـى دوال خـسارة متماثلـة وغير متماثلة وتم تخصيص النتائج للعينات المراقبة تتابعيا من النوع الثاني والقـيم المسجلة الدنيا.

٢- تم اختبار دقة النتائج باستخدام دراسة المحاكاة اعتمادا على عدد كبير من العينات و بمقارنة النتائج العددية لقيم المخاطرة لتقديرات نموذجي الإجهاد – القوة S_1,S_2 المختلفة لاحظنا من خلال الجداول أن قيم مخاطرة بييز المقـدرة لمقـدرات بييـز أصغر في معظم الحالات من مقابلاتها لمقدرات الإمكان الأكبر وذلك اعتمادا على دوال الخسارة المختلفة، مع ملاحظة أن قيم مخاطرة بييز المقدرة لتقـديرات بييـز المعتمدة على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة تقل بزيادة البـارامتر a عـن التقديرات التي تقابلها والمعتمدة على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنـة، أيـضا بزيادة حجم العينات تقل قيم مخاطرة بييز المقدرة للتقديرات المختلفة وبالتالي فـإن أداء طرق بييز يعطي نتائج أفضل من طريقة الإمكـان الأكبـر وتـزداد كفـاءة المقدرات بزيادة حجم العينات.

٣- تم حل مشكلة الحسابات المعقدة التي تنتج فـي اسـتدلالات بييـز اعتمـادا علـى التوزيعات القبلية المعلمة (في حالة عدم معلومية معلمتي التوزيع) باستخدام إحـدى طرق سلسلة ماركوف وحصلنا على نتائج جيدة.

٤- عند استخدامنا للتوزيعات القبلية غير المعلمة (في حالة عـدم معلوميـة معلمتـي التوزيع) واجهتنا مشكلة في الحصول على بعـض النتـائج باسـتخدام التكـاملات المباشرة فلجأنا إلى استخدام إحدى طرق سلسلة ماركوف ولاحظنا أن النتائج فـي هذه الحالة لا تتأثر باختيارنا لقيمة c وهو الحد الأعلى لفترة التوزيع القبلي غيـر المعام المنتظم للمعلمة α.

٥- كل النتائج العددية في هذا الباب تم انجازها باستخدام حزمـة بـرامج ماثيماتيكـا الإصدار السابع (Mathematica 7.0).

نتائج هذا الباب تعتبر جديدة في مجال استدلالات بييز لنموذج الإجهاد - القوة لتوزيع وايبل الأسي والمعتمدة على الإحصاءات المرتبة المعممة والحالات الخاصة منها، والجدير بالـذكر أن هذه النتائج نقوم بإعدادها للنشر في إحدى المجلات الإحصائية المتخصصة.

الفصل الخامس

تنبؤ العينة الواحدة لإحصاءات مرتبة معممة من توزيع وايبل الأسي

One-Sample Prediction for Generalized Order Statistics from the Exponentiated Weibull Distribution

---

(٥-١) مقدمـة Introduction

تم تخصيص هذا الفصل لدراسة ومناقشة تنبؤات الإمكان الأكبر (فترة ونقطة) إضـافة إلى تنبؤات بييز (فترة ونقطة) لقيم مستقبلية من توزيع وايبل الأسي ذي المعلمتـين، وذلـك باستخدام أسلوب العينة الواحدة اعتمادا على دوال خسارة متماثلة وغير متماثلة، وسيتم الأخذ في الاعتبار التوزيعات القبلية المعلمة وغير المعلمة التي سبق استخدامها في الفصلين الثالث والرابع.

(٥-٢) التنبؤ باستخدام أسلوب العينة الواحدة

One Sample Prediction

بفـرض أن $X(1,n,\tilde{m},k),X(2,n,\tilde{m},k),...,X(r,n,\tilde{m},k)$ هـي أول r مـن الإحصاءات المرتبة المعممة من عينة حجمها n من توزيع وايبل الأسي بـالمعلمتين α,θ، والمطلوب هو التنبؤ بالإحصاء المرتب المعمم المستقبلي

$$X_s \equiv X(s,n,\tilde{m},k),\ s=r+1,r+2,...,n.$$

دالة كثافة الاحتمال المشروطة للإحصاء المرتب المعمم المـستقبلي ذي الترتيـب s بـشرط معلومية أول r إحصاء مرتب معمم من توزيع وايبل الأسـي لقـيم $\tilde{m}$ المختلفـة تعطـى بالتعويض من العلاقتين (2.57) و (2.58) في العلاقتين (2.23) و(2.27) كما يلي:

الحالة الأولى: إذا كانت

$$m_1 = m_2 = ... = m_{r-1} = m,$$

فإن دالة كثافة الاحتمال المشروطة لـ X_s تعطى بالعلاقة:

$$g_1(x_s \mid \theta) = \begin{cases} \dfrac{k^{s-r}}{(s-r-1)!}\alpha\theta v(x_s) u^{\theta}(x_s) \\ \qquad \phi^{s-r-1}(x_r, x_s)\dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^{k}}, & m=-1, \\ C_{r,s}\alpha\theta v(x_s) u^{\theta}(x_s) \\ \qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r) - \zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1}\dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s - 1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}}, & m \neq -1, \end{cases} \tag{5.1}$$

حيث $C_{j-1}, \gamma_j, \ j = s, r+1$ سبق تعريفها بالعلاقتين (2.18) و(2.19) وكذلك

$$\left.\begin{aligned} &\zeta(.) \equiv \zeta(., \alpha, \theta) = 1 - u^{\theta}(.), \\ &\phi(x_r, x_s) \equiv \phi(x_r, x_s, \alpha, \theta) = \ln\left(\frac{\zeta(x_r)}{\zeta(x_s)}\right), \\ &C_{r,s} = \frac{C_{s-1}}{(s-r-1)!(m+1)^{s-r-1}C_{r-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\gamma_i \neq \gamma_{\ell}, \qquad i \neq \ell, \ i, \ell \in \{1, ..., n-1\},$$

فإن دالة كثافة الاحتمال المشروطة لـ X_s تعطى بالعلاقة:

$$g_2(x_s \mid \theta) = \frac{\alpha\theta C_{s-1}}{C_{r-1}} v(x_s) \frac{u^{\theta}(x_s)}{\zeta(x_s)} \sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i} , \tag{5.3}$$

حيث $a_i^{(r)}(s)$ سبق تعريفها بالعلاقة (2.29).

(٣-٥) التنبؤ في حالة معلومية المعلمة α

Prediction When α is Known

في هذه الحالة سيتم افتراض أن المعلمة α معلومة و أن المعلمة θ مجهولـة ولكنهـا متغير عشوائي يتبع توزيع قبلي معلم وآخرغير معلم كما في الفصل الثالث.

(٥-٣-١) تنبؤ الإمكان الأكبر:

Maximum likelihood prediction

إن تنبؤ الإمكان الأكبر يمكن حسابه لجميع الحالات الممكنة لقيم $\tilde{m}$ باستخدام العلاقات (5.1)،(5.3) بعد استبدال معلمة الشكل θ في كل منها بقيمة مقدر الإمكان الأكبر لها $\hat{\theta}_{ML}$ والذي سبق الحصول عليه من العلاقة (3.5) كما يلي: (انظر Ren,Sun and Dey (2006))

الحالة الأولى: إذا كانت

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{r-1} = m,$$

يمكن حساب تنبؤات الإمكان الأكبر في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

للحصول على حدي تنبؤ الإمكان الأكبر لأي مشاهدة مستقبلية $x_s, s = r+1, r+2, \ldots, n$ فإن ذلك يتطلب حساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[X_s \geq \mu | \underline{x}] = \int_{\mu}^{\infty} g_1(x_s | \hat{\theta}_{ML})\, dx_s,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k^{s-r} \alpha \hat{\theta}_{ML}}{(s-r-1)!} \displaystyle\int_{\mu}^{\infty} v(x_s) u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s) \\ \qquad \phi^{s-r-1}(x_r, x_s) \dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k} dx_s, & m = -1, \\ C_{r,s} \alpha \hat{\theta}_{ML} \displaystyle\int_{\mu}^{\infty} v(x_s) u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s) \\ \qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r) - \zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1} \dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s - 1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}} dx_s, & m \neq -1, \end{cases} \qquad (5.4)$$

ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من العلاقة (2.52) .

تنبؤ النقطة:

يتم الحصول على تنبؤ نقطة الإمكان الأكبر بحساب متوسط العلاقة (5.1) بعد استبدال معلمة الشكل θ بقيمة مقدر الإمكان الأكبر لها $\hat{\theta}_{ML}$ كما يلي:

$$\hat{x}_{s_{(ML)}} = E_{g_1}(X_s) = \int_0^\infty x_s g_1(x_s \mid \hat{\theta}_{ML})\, dx_s ,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k^{s-r}\alpha\hat{\theta}_{ML}}{(s-r-1)!}\displaystyle\int_0^\infty x_s v(x_s) u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s) \\ \qquad \phi^{s-r-1}(x_r, x_s)\dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^{k}} dx_s , & m=-1, \\ C_{r,s}\alpha\hat{\theta}_{ML}\displaystyle\int_0^\infty x_s v(x_s) u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s) \\ \qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r) - \zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1}\dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}} dx_s , & m \neq -1. \end{cases} \tag{5.5}$$

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\gamma_i \neq \gamma_\ell ,\ i \neq \ell,\ i, \ell \in \{1,\dots, n-1\},$$

يمكن حساب تنبؤات الإمكان الأكبر في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

للحصول على حدي تنبؤ الإمكان الأكبر لأي مشاهدة مستقبلية $x_s, s = r+1,\dots,n$ فإن ذلك يتطلب حساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[X_s \geq \mu \mid \underline{x}] = \int_\mu^\infty g_2(x_s \mid \hat{\theta}_{ML})\, dx_s ,$$

$$= \frac{\alpha\hat{\theta}_{ML} C_{s-1}}{C_{r-1}} \int_\mu^\infty v(x_s) \frac{u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s)}{\zeta(x_s)} \sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i} dx_s , \tag{5.6}$$

ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من (2.52).

تنبؤ النقطة:

يتم الحصول على تنبؤ نقطة الإمكان الأكبر بحساب متوسط العلاقة (5.3) كما يلي:

$$\hat{x}_{s_{(ML)}} = E_{g_2}(X_s) = \int_0^\infty x_s g_2(x_s \mid \hat{\theta}_{ML})\, dx_s ,$$

$$= \frac{\alpha\hat{\theta}_{ML} C_{s-1}}{C_{r-1}} \int_0^\infty x_s v(x_s) \frac{u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s)}{\zeta(x_s)} \sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i} dx_s . \tag{5.7}$$

(٥-٣-٢) تنبؤ بييز

Bayesian prediction

سيتم في هذا البند إيجاد تنبؤات بييز لأي مشاهدة مستقبلية $x_s, s = r+1,...,n$ اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة $x_j, j = 1,2,...,r$ باستخدام توزيع قبلي معلم وآخر غير معلم للمعلمة θ.

(٥-٣-٢-١) التنبؤ باستخدام توزيع قبلي معلم للمعلمة θ

Prediction using informative prior distribution for θ

سنفترض في هذه الحالة أن المعلمة θ متغير عشوائي يتبع توزيع قبلي معلم يأخذ الشكل (3.21).

الحالة الأولى: إذا كانت

$$m_1 = m_2 = ... = m_{r-1} = m,$$

يمكن حساب تنبؤات بييز في هذه الحالة كما يلي:

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بالتعويض من العلاقتين (5.1)،(3.22) في العلاقة (2.50) في الصورة التالية:

$$H_1(x_s \mid \underline{x}) = \int_0^\infty \pi_1^*(\theta \mid \underline{x}) g_1(x_s \mid \theta) d\theta,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K_1^{-1} k^{s-r} \alpha\, v(x_s)}{(s-r-1)!} \displaystyle\int_0^\infty \theta^{r+\nu} e^{-\delta\theta} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) u^\theta(x_s) \\ \qquad \phi^{s-r-1}(x_r, x_s) \dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k} d\theta, & m = -1, \\ K_1^{-1} C_{r,s} \alpha\, v(x_s) \displaystyle\int_0^\infty \theta^{r+\nu} e^{-\delta\theta} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) u^\theta(x_s) \\ \qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r) - \zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1} \dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s - 1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_r + 1}} d\theta, & m \neq -1, \end{cases} \qquad (5.8)$$

حيث $K_1, \eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ تعطى بالعلاقتين (3.23), (3.2) على الترتيب.

ونأتي الآن لحساب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

للحصول على حدي تنبؤ بييز لأي مشاهدة مستقبلية $x_s, s = r+1,...,n$ ، فإننا نقوم بحساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[X_s \geq \mu | \underline{x}] = \int_{\mu}^{\infty} H_1(x_s | \underline{x}) dx_s,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K_1^{-1} k^{s-r} \alpha}{(s-r-1)!} \int_{\mu}^{\infty} \int_0^{\infty} \theta^{r+\nu} e^{-\delta\theta} \eta(\underline{x}; \alpha, \theta) \nu(x_s) u^{\theta}(x_s) \\ \qquad \phi^{s-r-1}(x_r, x_s) \dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k} d\theta \, dx_s, \qquad m = -1, \\ K_1^{-1} C_{r,s} \alpha \int_{\mu}^{\infty} \int_0^{\infty} \theta^{r+\nu} e^{-\delta\theta} \eta(\underline{x}; \alpha, \theta) \nu(x_s) u^{\theta}(x_s) \\ \qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r) - \zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1} \dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s - 1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}} d\theta \, dx_s, m \neq -1, \end{cases} \quad (5.9)$$

ويعطى حدا تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (5.9) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤ النقطة:

تنبؤات النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة الآتية:

$$\hat{x}_{s_{(BS)}} = \omega \hat{x}_{s_{(ML)}} + (1-\omega) E_{pd}(X_s | \underline{x}), \qquad (5.10)$$

حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.5)، $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب كما يلي:

$$E_{pd}(X_s | \underline{x}) = \int_0^{\infty} x_s H_1(x_s | \underline{x}) dx_s,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K_1^{-1} k^{s-r} \alpha}{(s-r-1)!} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x_s \theta^{r+\nu} e^{-\delta\theta} \eta(x_i; \alpha, \theta) \nu(x_s) u^{\theta}(x_s) \\ \qquad \phi^{s-r-1}(x_r, x_s) \dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k} d\theta \, dx_s, \qquad m = -1, \\ K_1^{-1} C_{r,s} \alpha \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x_s \theta^{r+\nu} e^{-\delta\theta} \eta(\underline{x}; \alpha, \theta) \nu(x_s) u^{\theta}(x_s) \\ \qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r) - \zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1} \dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s - 1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}} d\theta \, dx_s, \ m \neq -1. \end{cases} \quad (5.11)$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا يمكن الحصول على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة الآتية:

$$\hat{x}_{s_{(BL)}} = -\frac{1}{a}\ln[\omega e^{-a\hat{x}_{s(ML)}} + (1-\omega)E_{pd}(e^{-aX_s} \mid \underline{x})], \qquad (5.12)$$

حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.5) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتعطى من:

$$E_{pd}(e^{-aX_s} \mid \underline{x}) = \int_0^\infty e^{-ax_s} H_1(x_s \mid \underline{x}) dx_s,$$

$$= \begin{cases} \frac{K_1^{-1} k^{s-r}\alpha}{(s-r-1)!}\int_0^\infty\int_0^\infty \theta^{r+\nu} e^{-(\delta\theta+ax_s)}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(x_s)\, u^\theta(x_s) \\ \qquad \phi^{s-r-1}(x_r,x_s)\frac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k} d\theta\, dx_s, \qquad m=-1, \\ K_1^{-1}C_{r,s}\,\alpha\int_0^\infty\int_0^\infty \theta^{r+\nu} e^{-(\delta\theta+ax_s)}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(x_s)\, u^\theta(x_s) \\ \qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r)-\zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1}\frac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}} d\theta\, dx_s,\ m\neq -1. \end{cases} \qquad (5.13)$$

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\gamma_i \neq \gamma_\ell,\ i\neq \ell,\ i,\ell\in\{1,...,n-1\},$$

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بالتعويض من العلاقتين (5.3)،(3.22) في العلاقة (2.50) في الصورة التالية:

$$H_2(x_s \mid \underline{x}) = \int_0^\infty \pi_1^*(\theta \mid \underline{x}) g_2(x_s \mid \theta) d\theta = \frac{\alpha K_1^{-1} C_{s-1}}{C_{r-1}}$$
$$v(x_s)\int_0^\infty \theta^{r+\nu} e^{-\delta\theta}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)}\sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i} d\theta, \qquad (5.14)$$

وتحسب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

الحصول على حدي تنبؤ بييز لأي مشاهدة مستقبلية $x_s, s=r+1,...,n$ يتطلب حساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[X_s \geq \mu \mid \underline{x}] = \int_\mu^\infty H_2(x_s \mid \underline{x}) dx_s = \frac{\alpha K_1^{-1} C_{s-1}}{C_{r-1}}$$
$$\int_\mu^\infty\int_0^\infty \theta^{r+\nu} e^{-\delta\theta}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(x_s)\frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)}\sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i} d\theta\, dx_s, \qquad (5.15)$$

حيث K_1 , $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ تعطى بالعلاقتين (3.23), (3.2) على الترتيب.

ويمكن حساب حدي تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (5.15) باستخدام العلاقة (2.52) .

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (5.10) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.7) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$E_{pd}(X_s|\underline{x}) = \int_0^\infty x_s H_2(x_s|\underline{x})\,dx_s = \frac{\alpha K_1^{-1} C_{s-1}}{C_{r-1}} \int_0^\infty\int_0^\infty x_s \theta^{r+v} e^{-\delta\theta}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,v(x_s)\frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)}\sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i} d\theta\, dx_s. \quad (5.16)$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (5.12) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.7) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$E_{pd}(e^{-aX_s}|\underline{x}) = \int_0^\infty e^{-ax_s} H_2(x_s|\underline{x})\,dx_s = \frac{\alpha K_1^{-1} C_{s-1}}{C_{r-1}} \int_0^\infty\int_0^\infty \theta^{r+v} e^{-(\delta\theta+ax_s)}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,v(x_s)\frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)}\sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i} d\theta\, dx_s. \quad (5.17)$$

(٥-٣-٢-٢) التنبؤ باستخدام توزيع قبلي غير معام للمعلمة θ

Prediction using non-informative prior distribution for θ

سوف نفترض في هذه الحالة أن المعلمة θ متغير عشوائي وتتبع توزيع قبلي غير معام يأخذ الشكل (3.32).

الحالة الأولى: إذا كانت

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{r-1} = m,$$

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبيز كحالة خاصة من العلاقة (5.8) وذلك بوضع $v=0,\delta=0$ في الصورة التالية:

$$H_3(x_s\,|\,\underline{x})=\int_0^\infty \pi_2^*(\theta\,|\,\underline{x})g_1(x_s\,|\theta)d\theta,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{J_1^{-1}k^{s-r}\alpha\, v(x_s)}{(s-r-1)!}\int_0^\infty \theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)u^\theta(x_s)\\ \qquad \phi^{s-r-1}(x_r,x_s)\dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k}d\theta, & m=-1,\\ J_1^{-1}C_{r,s}\alpha\, v(x_s)\int_0^\infty \theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,u^\theta(x_s)\\ \qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r)-\zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1}\dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}}d\theta, & m\neq-1,\end{cases}\qquad(5.18)$$

حيث $J_1\,,\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ تعطى بالعلاقتين (3.34), (3.2) على الترتيب.

وتحسب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

للحصول على حدي تنبؤ بيز لأي مشاهدة مستقبلية $x_s, s=r+1,...,n$ ، فإننا نقوم بحساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[X_s\ge\mu\,|\,\underline{x}]=\int_\mu^\infty H_3(x_s\,|\,\underline{x})dx_s,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{J_1^{-1}k^{s-r}\alpha}{(s-r-1)!}\int_\mu^\infty\int_0^\infty \theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,v(x_s)\,u^\theta(x_s)\\ \qquad \phi^{s-r-1}(x_r,x_s)\dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k}d\theta\,dx_s, & m=-1,\\ J_1^{-1}C_{r,s}\alpha\int_\mu^\infty\int_0^\infty \theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(x_s)\,u^\theta(x_s)\\ \qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r)-\zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1}\dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}}d\theta\,dx_s, & m\neq-1,\end{cases}\qquad(5.19)$$

ويعطى حدا تنبؤ بيز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\,\tau\%$ من العلاقة (5.19) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (5.10) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s

والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.5) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالـة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب كما يلي:

$$E_{pd}(X_s|\underline{x})=\int_0^\infty x_s H_3(x_s|\underline{x})dx_s,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{J_1^{-1}k^{s-r}\alpha}{(s-r-1)!}\int_0^\infty\int_0^\infty x_s\theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(x_s)u^\theta(x_s)\\ \qquad \phi^{s-r-1}(x_r,x_s)\dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k}d\theta\,dx_s, & m=-1,\\ J_1^{-1}C_{r,s}\alpha\int_0^\infty\int_0^\infty x_s\theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(x_s)\,u^\theta(x_s)\\ \qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r)-\zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1}\dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}}d\theta\,dx_s, m\neq-1.\end{cases} \qquad (5.20)$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا يمكن الحصول على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالـة الخـسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (5.12) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمـشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.5) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعـة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتعطى من:

$$E_{pd}(e^{-aX_s}|\underline{x})=\int_0^\infty e^{-ax_s}H_3(x_s|\underline{x})dx_s,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{J_1^{-1}k^{s-r}\alpha}{(s-r-1)!}\int_0^\infty\int_0^\infty \theta^r e^{-ax_s}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(x_s)u^\theta(x_s)\\ \qquad \phi^{s-r-1}(x_r,x_s)\dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k}d\theta\,dx_s, & m=-1,\\ J_1^{-1}C_{r,s}\alpha\int_0^\infty\int_0^\infty \theta^r e^{-ax_s}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(x_s)u^\theta(x_s)\\ \qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r)-\zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1}\dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}}d\theta\,dx_s, m\neq-1.\end{cases} \qquad (5.21)$$

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\gamma_i\neq\gamma_\ell,\ i\neq\ell, i,\ell\in\{1,...,n-1\},$$

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بوضع $v=0,\delta=0$ في العلاقة (5.14) كمـا يلي :

$$H_4(x_s \mid \underline{x}) = \int_0^\infty \pi_2^*(\theta \mid \underline{x}) g_2(x_s \mid \theta) d\theta = \frac{\alpha J_1^{-1} C_{s-1}}{C_{r-1}}$$
$$v(x_s) \int_0^\infty \theta^r \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)} \sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)} \right)^{\gamma_i} d\theta, \quad (5.22)$$

حيث J_1 , $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ تعطى بالعلاقتين (3.2) ,(3.34) على الترتيب.

ونأتي الآن لحساب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

الحصول على حدي تنبؤ بييز لأي مشاهدة مستقبلية $x_s, s = r+1,...,n$ يتطلب حساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[X_s \geq \mu \mid \underline{x}] = \int_\mu^\infty H_4(x_s \mid \underline{x}) dx_s = \frac{\alpha J_1^{-1} C_{s-1}}{C_{r-1}}$$
$$\int_\mu^\infty \int_0^\infty \theta^r \eta(\underline{x};\alpha,\theta) v(x_s) \frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)} \sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)} \right)^{\gamma_i} d\theta\, dx_s, \quad (5.23)$$

ويمكن حساب حدي تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (5.23) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (5.10) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.7) و $E_{pd}(.\mid \underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$E_{pd}(X_s \mid \underline{x}) = \int_0^\infty x_s H_4(x_s \mid \underline{x})\, dx_s = \frac{\alpha J_1^{-1} C_{s-1}}{C_{r-1}}$$
$$\int_0^\infty \int_0^\infty x_s \theta^r \eta(\underline{x};\alpha,\theta) v(x_s) \frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)} \sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)} \right)^{\gamma_i} d\theta\, dx_s. \quad (5.24)$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة:

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (5.12) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s

والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.7) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$E_{pd}(e^{-aX_s}|\underline{x}) = \int_0^\infty e^{-ax_s} H_4(x_s|\underline{x})\,dx_s = \frac{\alpha J_1^{-1} C_{s-1}}{C_{r-1}} \int_0^\infty\int_0^\infty \theta^r e^{-ax_s}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(x_s)\frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)}\sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i} d\theta\, dx_s. \tag{5.25}$$

(٥-٤) التنبؤ في حالة عدم معلومية المعلمتين α,θ

Prediction when α and θ are unknown

سوف نفترض في هذه الحالة أن كلا المعلمتين α,θ مجهولتان ولكنهما متغيران عشوائيان ويتبعان توزيعات قبلية معلمة وأخرى غير معلمة كما في الفصل الثالث.

(٥-٤-١) تنبؤ الإمكان الأكبر

Maximum likelihood prediction

إن تنبؤ الإمكان الأكبر يمكن حسابه لجميع الحالات الممكنة لقيم $\tilde{m}$ باستخدام العلاقات (5.1)،(5.3) بعد استبدال المعلمتين α,θ في كل منها بقيمتي مقدري الإمكان الأكبر لهما $\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML}$ والذي سبق حسابهما من العلاقتين (3.4)،(3.5) كما يلي: (انظر (Ren,Sun and Dey (2006)

الحالة الأولى: إذا كانت

$$m_1 = m_2 = ... = m_{r-1} = m,$$

يمكن حساب تنبؤات الإمكان الأكبر في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

للحصول على حدي تنبؤ الإمكان الأكبر لأي مشاهدة مستقبلية $x_s, s=r+1,r+2,...$ فإن ذلك يتطلب حساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[X_s \ge \mu|\underline{x}] = \int_\mu^\infty g_1(x_s|\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML})dx_s,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k^{s-r}\hat{\alpha}_{ML}\hat{\theta}_{ML}}{(s-r-1)!}\displaystyle\int_\mu^\infty v(x_s)u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s)\phi^{s-r-1}(x_r,x_s)\frac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k}dx_s, & m=-1, \\ C_{r,s}\hat{\alpha}_{ML}\hat{\theta}_{ML}\displaystyle\int_\mu^\infty v(x_s)u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s)\left[\zeta^{m+1}(x_r)-\zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1}\frac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}}dx_s, & m\ne -1, \end{cases} \tag{5.26}$$

ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من العلاقة (2.26) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤ النقطة:

يتم الحصول على تنبؤ نقطة الإمكان الأكبر بحساب متوسط العلاقـة (5.1) بعـد اسـتبدال المعلمتين α,θ بقيمتي مقدري الإمكان الأكبر لهما $\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\theta}_{ML}$ كما يلي:

$$\hat{x}_{s_{(ML)}} = E_{g_1}(X_s) = \int_0^\infty x_s g_1(x_s \mid \hat{\alpha}_{ML}, \hat{\theta}_{ML}) dx_s ,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k^{s-r}\hat{\alpha}_{ML}\hat{\theta}_{ML}}{(s-r-1)!}\displaystyle\int_0^\infty x_s v(x_s)\, u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s) \\ \qquad\qquad \phi^{s-r-1}(x_r,x_s)\dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k}dx_s , \qquad m=-1, \\ C_{r,s}\hat{\alpha}_{ML}\hat{\theta}_{ML}\displaystyle\int_0^\infty x_s v(x_s)\, u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s) \\ \qquad\qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r)-\zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1}\dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}}dx_s , \ m\neq -1. \end{cases} \tag{5.27}$$

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\gamma_i \neq \gamma_\ell ,\ i \neq \ell ,\ i,\ell \in \{1,...,n-1\},$$

يمكن حساب تنبؤات الإمكان الأكبر في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

للحصول على حدي تنبؤ الإمكان الأكبر لأي مشاهدة مستقبلية $x_s, s=r+1,...,n$ فإن ذلك يتطلب حساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[X_s \geq \mu \mid \underline{x}] = \int_\mu^\infty g_2(x_s \mid \hat{\alpha}_{ML}, \hat{\theta}_{ML}) dx_s ,$$

$$= \frac{C_{s-1}\hat{\alpha}_{ML}\hat{\theta}_{ML}}{C_{r-1}}\int_\mu^\infty v(x_s)\frac{u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s)}{\zeta(x_s)}\sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i} dx_s . \tag{5.28}$$

ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من (2.52).

تنبؤ النقطة:

يتم الحصول على تنبؤ نقطة الإمكان الأكبر بحساب متوسط العلاقة (5.3) كما يلي:

$$\hat{x}_{s_{(ML)}} = E_{g_2}(X_s) = \int_0^\infty x_s g_2(x_s \mid \hat{\alpha}_{ML}, \hat{\theta}_{ML}) dx_s,$$
$$= \frac{C_{s-1}\hat{\alpha}_{ML}\hat{\theta}_{ML}}{C_{r-1}} \int_0^\infty x_s v(x_s) \frac{u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s)}{\zeta(x_s)} \sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i} dx_s. \quad (5.29)$$

(٥-٤-٢) تنبؤ بييز:

Bayesian prediction

نوجد الآن حدود تنبـؤ بييـز لأي مـشاهدة مـستقبلية $x_s, s = r+1,...,n$ اعتمـادا علـى الإحصاءات المرتبة المعممة $x_j, j = 1,2,...,r$ باستخدام توزيعات قبلية معلمة وأخرى غيـر معلمة للمعلمتين α,θ.

(٥-٤-٢-١) التنبؤ باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعلمتين α, θ

Prediction using informative prior distributions for α, θ

سوف نفترض في هذه الحالة أن المعلمتين α,θ متغيران عشوائيان ويتبعان توزيعا قبليا معلما يأخذ الشكل (3.43).

الحالة الأولى: إذا كانت

$$m_1 = m_2 = ... = m_{r-1} = m,$$

يمكن حساب تنبؤات بييز في هذه الحالة كما يلي:

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بالتعويض مـن العلاقتـين (5.1)،(3.44) فـي العلاقة (2.50) في الصورة التالية:

$$H_5(x_s \mid \underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \pi_3^*(\alpha,\theta \mid \underline{x}) g_1(x_s \mid \alpha,\theta) d\alpha\, d\theta,$$
$$= \begin{cases} \dfrac{K_2^{-1}k^{s-r}}{(s-r-1)!}\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ \quad v(x_s)\, u^{\theta}(x_s)\, \phi^{s-r-1}(x_r,x_s)\dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k} d\alpha\, d\theta, & m=-1, \\ K_2^{-1}C_{r,s}\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ \quad v(x_s)\, u^{\theta}(x_s)\left[\zeta^{m+1}(x_r) - \zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1} \dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}} d\alpha\, d\theta, & m \neq -1, \end{cases} \quad (5.30)$$

حيث $K_2, \eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ تعطى بالمعادلات (3.2)،(3.45) على الترتيب.

وتحسب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

للحصول على حدي تنبؤ بييز لأي مشاهدة مستقبلية $x_s, s=r+1,...,n$ ، فإننا نقوم بحساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[X_s \geq \mu | \underline{x}] = \int_{\mu}^{\infty} H_5(x_s | \underline{x}) dx_s ,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K_2^{-1} k^{s-r}}{(s-r-1)!} \int_{\mu}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \alpha^{r+d-v} \theta^{r+v} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ \quad v(x_s)\, u^{\theta}(x_s)\, \phi^{s-r-1}(x_r,x_s) \dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k} d\alpha\, d\theta\, dx_s , \qquad m=-1, \\ K_2^{-1} C_{r,s} \int_{\mu}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \alpha^{r+d-v} \theta^{r+v} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ v(x_s)\, u^{\theta}(x_s) \left[\zeta^{m+1}(x_r) - \zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1} \dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}} d\alpha\, d\theta dx_s , m \neq -1, \end{cases} \qquad (5.31)$$

ويعطى حدا تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (5.31) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (5.10) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.27) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب كما يلي:

$$E_{pd}(X_s | \underline{x}) = \int_0^{\infty} x_s H_5(x_s | \underline{x}) dx_s ,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K_2^{-1} k^{s-r}}{(s-r-1)!} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x_s \alpha^{r+d-v} \theta^{r+v} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ \quad v(x_s)\, u^{\theta}(x_s) \phi^{s-r-1}(x_r,x_s) \dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k}\, d\alpha\, d\theta\, dx_s , \qquad m=-1, \\ K_2^{-1} C_{r,s} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x_s \alpha^{r+d-v} \theta^{r+v} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ v(x_s)\, u^{\theta}(x_s) \left[\zeta^{m+1}(x_r) - \zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1} \dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}} d\alpha\, d\theta\, dx_s , m \neq -1. \end{cases} \qquad (5.32)$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا يمكن الحصول على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالـة الخـسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (5.12) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمـشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.27) و$E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتعطى من:

$$E_{pd}(e^{-aX_s}|\underline{x})=\int_0^\infty e^{-ax_s}H_5(x_s|\underline{x})dx_s,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{K_2^{-1}k^{s-r}}{(s-r-1)!}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax_s}\alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(x_s)u^\theta(x_s)\phi^{s-r-1}(x_r,x_s)\dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k}d\alpha\, d\theta\, dx_s, & m=-1,\\ K_2^{-1}C_{r,s}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax_s}\alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(x_s)u^\theta(x_s)\left[\zeta^{m+1}(x_r)-\zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1}\dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}}d\alpha\, d\theta\, dx_s, & m\neq-1.\end{cases}\qquad(5.33)$$

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\gamma_i\neq\gamma_\ell,\ i\neq\ell,\ i,\ell\in\{1,...,n-1\},$$

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بالتعويض مـن العلاقتـين (5.3)،(3.44) فـي العلاقة (2.50) في الصورة التالية:

$$H_6(x_s|\underline{x})=\int_0^\infty\int_0^\infty\pi_3^*(\alpha,\theta|\underline{x})g_2(x_s|\alpha,\theta)d\alpha\, d\theta,$$

$$=\frac{K_2^{-1}C_{s-1}}{C_{r-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty\alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,v(x_s)$$
$$\frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)}\sum_{i=r+1}^{s}a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i}d\alpha\, d\theta,\qquad(5.34)$$

حيث $K_2,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ تعطى بالمعادلات (3.2)،(3.45) على الترتيب.

وتحسب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

الحصول على حدي تنبؤ بييز لأي مشاهدة مـستقبلية $x_s, s=r+1,...,n$ يتطلـب حـساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[X_s \geq \mu | \underline{x}] = \int_{\mu}^{\infty} H_6(x_s | \underline{x}) dx_s ,$$

$$= \frac{K_2^{-1} C_{s-1}}{C_{r-1}} \int_{\mu}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \alpha^{r+d-v} \theta^{r+v} e^{-(\alpha^2 + b\theta)/b\alpha} \eta(\underline{x}; \alpha, \theta) v(x_s) \quad (5.35)$$

$$\frac{u^{\theta}(x_s)}{\zeta(x_s)} \sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)} \right)^{\gamma_i} d\alpha \, d\theta dx_s .$$

ويمكن حساب حدي تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمـستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (5.35) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة خـسارة مربـع الخطـأ المتوازنة من العلاقة (5.10) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المـستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.29) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالـة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$E_{pd}(X_s | \underline{x}) = \int_0^{\infty} x_s H_6(x_s | \underline{x}) \, dx_s ,$$

$$= \frac{K_2^{-1} C_{s-1}}{C_{r-1}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x_s \alpha^{r+d-v} \theta^{r+v} e^{-(\alpha^2 + b\theta)/b\alpha} \eta(\underline{x}; \alpha, \theta) v(x_s) \quad (5.36)$$

$$\frac{u^{\theta}(x_s)}{\zeta(x_s)} \sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)} \right)^{\gamma_i} d\alpha d\theta dx_s .$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطيـة الأسـية المتوازنة من العلاقة (5.12) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمـشاهدة المـستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.29) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالـة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$E_{pd}(e^{-aX_s} | \underline{x}) = \int_0^{\infty} e^{-ax_s} H_6(x_s | \underline{x}) \, dx_s ,$$

$$= \frac{K_2^{-1} C_{s-1}}{C_{r-1}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-ax_s} \alpha^{r+d-v} \theta^{r+v} e^{-(\alpha^2 + b\theta)/b\alpha} \eta(\underline{x}; \alpha, \theta) v(x_s) \quad (5.37)$$

$$\frac{u^{\theta}(x_s)}{\zeta(x_s)} \sum_{i=r+1}^{s} a_i^{(r)}(s) \left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)} \right)^{\gamma_i} d\alpha \, d\theta \, dx_s .$$

(٥-٤-٢-٢) التنبؤ باستخدام توزيعات قبلية غير معلمة للمعلمتين α, θ

Prediction using non - informative prior distributions for α, θ

سنفترض في هذه الحالة أن المعلمتين α,θ متغيران عشوائيان يتبعان توزيعين قبليين غير معلمين كما بالعلاقتين (3.54)،(3.55) .

الحالة الأولى:

إذا كانت

$$m_1 = m_2 = ... = m_{r-1} = m,$$

يمكن حساب تنبؤات بييز في هذه الحالة كما يلي:

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بالتعويض من العلاقتين (5.1)،(3.56) في العلاقة (2.50) في الصورة التالية:

$$H_7(x_s \mid \underline{x}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \pi_4^*(\alpha,\theta \mid \underline{x}) g_1(x_s \mid \alpha,\theta) d\alpha\, d\theta,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{J_2^{-1} k^{s-r}}{(s-r-1)!} \displaystyle\int_0^\infty \int_0^c \alpha^{r+1} \theta^r \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ \quad v(x_s)\, u^\theta(x_s)\, \phi^{s-r-1}(x_r, x_s) \dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k} d\alpha\, d\theta, \quad m = -1, \\ J_2^{-1} C_{r,s} \displaystyle\int_0^\infty \int_0^c \alpha^{r+1} \theta^r \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, v(x_s)\, u^\theta(x_s) \\ \quad \left[\zeta^{m+1}(x_r) - \zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1} \dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s - 1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}} d\alpha\, d\theta, \; m \neq -1, \end{cases} \qquad (5.38)$$

حيث $J_2,\ \eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ تعطى بالمعادلات (3.2)،(3.57) على الترتيب.

وتحسب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

للحصول على حدي تنبؤ بييز لأي مشاهدة مستقبلية $x_s, s = r+1,...,n$ ، فإننا نقوم بحساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[X_s \geq \mu | \underline{x}] = \int_{\mu}^{\infty} H_7(x_s | \underline{x}) dx_s,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{J_2^{-1} k^{s-r}}{(s-r-1)!} \int_{\mu}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{c} \alpha^{r+1} \theta^r \, \eta(\underline{x}; \alpha, \theta) v(x_s) \, u^{\theta}(x_s) \\ \quad \phi^{s-r-1}(x_r, x_s) \dfrac{[\zeta(x_s)]^{k-1}}{[\zeta(x_r)]^k} d\alpha \, d\theta \, dx_s, \qquad m = -1, \\ J_2^{-1} C_{r,s} \int_{\mu}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{c} \alpha^{r+1} \theta^r \, \eta(\underline{x}; \alpha, \theta) \, v(x_s) \, u^{\theta}(x_s) \\ \left[\zeta^{m+1}(x_r) - \zeta^{m+1}(x_s) \right]^{s-r-1} \dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s - 1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}} d\alpha \, d\theta \, dx_s, \; m \neq -1, \end{cases} \tag{5.39}$$

ويعطى حدا تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (5.39) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (5.10) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s المعطى بالعلاقة (5.27) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب كما يلي:

$$E_{pd}(X_s | \underline{x}) = \int_0^{\infty} x_s H_7(x_s | \underline{x}) dx_s,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{J_2^{-1} k^{s-r}}{(s-r-1)!} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{c} x_s \alpha^{r+1} \theta^r \, \eta(\underline{x}; \alpha, \theta) v(x_s) \, u^{\theta}(x_s) \\ \quad \phi^{s-r-1}(x_r, x_s) \dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s - 1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}} d\alpha \, d\theta \, dx_s, \qquad m = -1, \\ J_2^{-1} C_{r,s} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{c} x_s \alpha^{r+1} \theta^r \eta(\underline{x}; \alpha, \theta) \, v(x_s) \, u^{\theta}(x_s) \\ \left[\zeta^{m+1}(x_r) - \zeta^{m+1}(x_s) \right]^{s-r-1} \dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s - 1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}} d\alpha \, d\theta \, dx_s, \; m \neq -1. \end{cases} \tag{5.40}$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا يمكن الحصول على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (5.12) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s المعطى بالعلاقة (5.27) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب كما يلي:

$$E_{pd}(e^{-aX_s}\mid \underline{x})=\int_0^\infty e^{-ax_s}H_7(x_s\mid \underline{x})dx_s,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{J_2^{-1}k^{s-r}}{(s-r-1)!}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^c e^{-ax_s}\alpha^{r+1}\theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,v(x_s)\,u^\theta(x_s)\\ \qquad \phi^{s-r-1}(x_r,x_s)\dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}}d\alpha\, d\theta\, dx_s, \qquad m=-1,\\ J_2^{-1}C_{r,s}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^c e^{-ax_s}\alpha^{r+1}\theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,v(x_s)\,u^\theta(x_s)\\ \qquad \left[\zeta^{m+1}(x_r)-\zeta^{m+1}(x_s)\right]^{s-r-1}\dfrac{[\zeta(x_s)]^{\gamma_s-1}}{[\zeta(x_r)]^{\gamma_{r+1}}}d\alpha\, d\theta\, dx_s,\ m\neq-1.\end{cases} \tag{5.41}$$

الحالة الثانية:

إذا كانت:

$$\gamma_i\neq\gamma_\ell,\ i\neq\ell,\ i,\ell\in\{1,\ldots,n-1\},$$

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بالتعويض من العلاقتين (5.3)،(3.56) في العلاقة (2.50) في الصورة التالية:

$$H_8(x_s\mid \underline{x})=\int_0^\infty\int_0^c \pi_4^*(\alpha,\theta\mid \underline{x})g_2(x_s\mid\alpha,\theta)d\alpha\, d\theta,$$

$$=\frac{J_2^{-1}C_{s-1}}{C_{r-1}}\int_0^\infty\int_0^c \alpha^{r+1}\theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,v(x_s) \tag{5.42}$$

$$\frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)}\sum_{i=r+1}^{s}a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i}d\alpha\, d\theta,$$

حيث $J_2,\ \eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ تعطى بالمعادلات (3.2)،(3.57) على الترتيب.

ونأتي الآن لحساب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

الحصول على حدي تنبؤ بييز لأي مشاهدة مستقبلية $x_s, s=r+1,\ldots,n$ يتطلب حساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[X_s\geq\mu\mid \underline{x}]=\int_\mu^\infty H_8(x_s\mid \underline{x})dx_s,$$

$$=\frac{J_2^{-1}C_{s-1}}{C_{r-1}}\int_\mu^\infty\int_0^\infty\int_0^c \alpha^{r+1}\theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,v(x_s) \tag{5.43}$$

$$\frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)}\sum_{i=r+1}^{s}a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i}d\alpha\, d\theta\, dx_s,$$

ويمكن حساب حدي تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (5.43) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (5.10) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s المعطى بالعلاقة (5.29) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$E_{pd}(X_s\,|\,\underline{x})=\int_0^\infty x_s H_8(x_s\,|\,\underline{x})\,dx_s\,,$$
$$=\frac{J_2^{-1}C_{s-1}}{C_{r-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^c\; x_s\alpha^{r+1}\theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(x_s) \qquad (5.44)$$
$$\frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)}\sum_{i=r+1}^{s}a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i}d\alpha\,d\theta\,dx_s\,.$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (5.12) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s المعطى بالعلاقة (5.29) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب كما يلي:

$$E_{pd}(e^{-aX_s}\,|\,\underline{x})=\int_0^\infty e^{-ax_s}H_8(x_s\,|\,\underline{x})\,dx_s\,,$$
$$=\frac{J_2^{-1}C_{s-1}}{C_{r-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^c\; e^{-ax_s}\alpha^{r+1}\theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(x_s) \qquad (5.45)$$
$$\frac{u^\theta(x_s)}{\zeta(x_s)}\sum_{i=r+1}^{s}a_i^{(r)}(s)\left(\frac{\zeta(x_s)}{\zeta(x_r)}\right)^{\gamma_i}d\alpha\,d\theta\,dx_s\,.$$

(٥-٥) القيم المسجلة الدنيا كحالة خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة

Lower record values as a special case of the generalized order statistics

في هذا البند سوف تخصص النتائج التي تم الحصول عليها للقيم المسجلة الدنيا، أي أنه سيتم التنبؤ عن القيم المسجلة $x_s, s=r+1,r+2,...$ بفرض معلومية القيم المسجلة $x_1>x_2>...>x_r$. وكما سبق فإنه يمكن الحصول على القيم المسجلة الدنيا كحاله خاصة

من الإحصاءات المرتبة المعممة بعد تحويلها إلى الإحصاءات المرتبة المعممة المقابلة باستبدال الدالة $1-F(x)$ بالدالة $F(x)$ (وهذا يكافئ استبدال الدالة $1-u^{\theta}(x)$ بالدالة $u^{\theta}(x)$) وكذلك بوضع $\gamma_r = k = 1$ و $m_i = -1$ لجميع قيم $i = 1, 2, ..., r-1$.

(٥-٥-١) تنبؤ الإمكان الأكبر للقيم المسجلة الدنيا

نحصل الآن على تنبؤ الإمكان الأكبر للقيم المسجلة الدنيا كحالة خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة كما يلي:

تنبؤ الفترة عندما تكون α معلومة:

نحصل على حدي تنبؤ الإمكان الأكبر للقيمة المسجلة الدنيا $x_s, s = r+1, r+2, ...$ من العلاقة (5.4) كما يلي:

$$\Pr[X_s \geq \mu | \underline{x}] = \frac{\alpha\, \hat{\theta}_{MLr}^{s-r}}{(s-r-1)!\, u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_r)} \int_{\mu}^{x_r} v(x_s)\, u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_s) \left(\ln \frac{u(x_r)}{u(x_s)} \right)^{s-r-1} dx_s, \qquad (5.46)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s = r+1$ نحصل على

$$\begin{aligned} \Pr[X_{r+1} \geq \mu | \underline{x}] &= \frac{\alpha \hat{\theta}_{MLr}}{u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_r)} \int_{\mu}^{x_r} x_{r+1}^{\alpha-1} e^{-x_{r+1}^{\alpha}} u^{\hat{\theta}_{MLr}-1}(x_{r+1}) dx_{r+1}, \\ &= \frac{\hat{\theta}_{MLr}}{u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_r)} \int_{u(\mu)}^{u(x_r)} z^{\hat{\theta}_{MLr}-1} dz, \qquad (5.47) \\ &= \frac{1}{u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_r)} \left[u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_r) - u^{\hat{\theta}_{MLr}}(\mu) \right]. \end{aligned}$$

نلاحظ من (5.47) أن $\Pr[X_{r+1} \geq 0 | \underline{x}] = 1$، ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من العلاقة الآتية:

$$\left.\begin{aligned} L(\underline{x}) &= \left[-\ln\left\{ 1 - u(x_r) \left(\tfrac{1-\tau}{2}\right)^{1/\hat{\theta}_{MLr}} \right\} \right]^{1/\alpha}, \\ U(\underline{x}) &= \left[-\ln\left\{ 1 - u(x_r) \left(\tfrac{1+\tau}{2}\right)^{1/\hat{\theta}_{MLr}} \right\} \right]^{1/\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.48)$$

تنبؤ النقطة عندما تكون α معلومة:

يتم الحصول على تنبؤ نقطة الإمكان الأكبر من العلاقة (5.5) كما يلي:

$$\hat{x}_{s_{(ML)}} = \frac{\alpha\, \hat{\theta}_{MLr}^{s-r}}{(s-r-1)!\, u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_r)} \int_0^{x_r} x_s v(x_s)\, u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_s) \left(\ln \frac{u(x_r)}{u(x_s)} \right)^{s-r-1} dx_s, \qquad (5.49)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s = r+1$ نحصل على

$$\hat{x}_{r+1_{(ML)}} = \frac{\alpha \hat{\theta}_{MLr}}{u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_r)} \int_0^{x_r} x_{r+1}^{\alpha} e^{-x_{r+1}^{\alpha}} u^{\hat{\theta}_{MLr}-1}(x_{r+1})\, dx_{r+1}. \qquad (5.50)$$

حيث $\hat{\theta}_{MLr}$ سبق الحصول عليها في العلاقة (3.112).

تنبؤ الفترة عندما تكون المعلمتان α,θ مجهولتين:

نحصل على حدي تنبؤ الإمكان الأكبر للقيمة المسجلة الدنيا $x_s, s = r+1, r+2, ...$ من العلاقة (5.26) كما يلي:

$$\Pr[X_s \geq \mu \,|\, \underline{x}] = \frac{\hat{\alpha}_{ML}\, \hat{\theta}_{MLr}^{s-r}}{u^{\hat{\theta}_{MLr}}(s-r-1)!} \int_{\mu}^{x_r} v(x_s)\, u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s) \left(\ln \frac{u(x_r)}{u(x_s)} \right)^{s-r-1} dx_s, \qquad (5.51)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s = r+1$ نحصل على

$$\begin{aligned}
\Pr[X_{r+1} \geq \mu \,|\, \underline{x}] &= \frac{\hat{\alpha}_{MLr} \hat{\theta}_{MLr}}{u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_r)} \int_{\mu}^{x_r} x_{r+1}^{\hat{\alpha}_{MLr}-1} e^{-x_{r+1}^{\hat{\alpha}_{MLr}}} u^{\hat{\theta}_{MLr}-1}(x_{r+1})\, dx_{r+1}, \\
&= \frac{\hat{\theta}_{MLr}}{u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_r)} \int_{u(\mu)}^{u(x_r)} z^{\hat{\theta}_{MLr}-1} dz, \qquad (5.52) \\
&= \frac{1}{u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_r)} \left[u^{\hat{\theta}_{MLr}}(x_r) - u^{\hat{\theta}_{MLr}}(\mu) \right].
\end{aligned}$$

نلاحظ من (5.52) أن $\Pr[X_{r+1} \geq 0 \,|\, \underline{x}] = 1$ ، ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من العلاقة الآتية:

$$\left.\begin{aligned}
L(\underline{x}) &= \left[-\ln \left\{ 1 - u(x_r) \left(\tfrac{1-\tau}{2} \right)^{1/\hat{\theta}_{MLr}} \right\} \right]^{1/\hat{\alpha}_{MLr}}, \\
U(\underline{x}) &= \left[-\ln \left\{ 1 - u(x_r) \left(\tfrac{1+\tau}{2} \right)^{1/\hat{\theta}_{MLr}} \right\} \right]^{1/\hat{\alpha}_{MLr}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.53)$$

تنبؤ النقطة عندما تكون المعلمتان α,θ مجهولتين:

يتم الحصول على تنبؤ نقطة الإمكان الأكبر من العلاقة (5.27) كما يلي:

$$\hat{x}_{s_{(ML)}} = \frac{\hat{\alpha}_{ML}\,\hat{\theta}_{ML}^{s-r}}{(s-r-1)!\,u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_r)} \int_0^{x_r} x_s v(x_s)\, u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_s) \left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1} dx_s, \qquad (5.54)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s = r+1$ نحصل على

$$\hat{x}_{r+1_{(ML)}} = \frac{\hat{\alpha}_{ML}\,\hat{\theta}_{ML}}{u^{\hat{\theta}_{ML}}(x_r)} \int_0^{x_r} x_{r+1}^{\hat{\alpha}_{ML}} e^{-x_{r+1}^{\hat{\alpha}_{ML}}} u^{\hat{\theta}_{ML}-1}(x_{r+1})\, dx_{r+1}, \qquad (5.55)$$

حيث $\hat{\alpha}_{MLr}, \hat{\theta}_{MLr}$ نحصل عليهما من العلاقتين (3.112),(3.113) على التوالي.

(٥-٥-٢) تنبؤ بييز للقيم المسجلة الدنيا

نحصل الآن على تنبؤ بييز للقيم المسجلة الدنيا كحالة خاصة من الإحـصاءات المرتبـة المعممة كما يلي:

التنبؤ عندما تكون α معلومة:

نحصل على تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا $x_s, s = r+1, r+2, \ldots$ وذلك بفرض أن المعلمـة α معلومة والمعلمة θ متغير عشوائي يتبع توزيعا قبليا معلما وآخر غير معلم.

التنبؤ باستخدام توزيع قبلي معلم للمعلمة θ

تنبؤ الفترة:

نحصل على حدي تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا $x_s, s = r+1, r+2, \ldots$ من العلاقـة (5.9) كما يلي:

$$\begin{aligned} \Pr[X_s \ge \mu \,|\, \underline{x}] &= \frac{K_1^{-1}\alpha}{(s-r-1)!} \int_\mu^{x_r} \int_0^\infty \theta^{\nu+s-1} e^{-\delta\theta} \\ &\quad \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) v(x_s)\, u^{\theta}(x_s) \left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1} d\theta\, dx_s, \\ &= \frac{K_1^{-1}\alpha}{(s-r-1)!} \Gamma(\nu+s) \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) \int_\mu^{x_r} v(x_s) \\ &\quad \left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1} [\delta - \ln u(x_s)]^{-(\nu+s)} dx_s, \end{aligned} \qquad (5.56)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s = r+1$ نحصل على

$$\Pr[X_{r+1} \geq \mu \mid \underline{x}] = K_1^{-1}\alpha\Gamma(\nu+r+1)\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)$$
$$\int_{\mu}^{x_r}\nu(x_{r+1})[\delta-\ln u(x_{r+1})]^{-(\nu+r+1)}dx_{r+1}$$
$$= K_1^{-1}\Gamma(\nu+r)\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right) \tag{5.57}$$
$$\left\{[\delta-\ln u(x_r)]^{-(\nu+r)}-[\delta-\ln u(\mu)]^{-(\nu+r)}\right\},$$

نلاحظ من (5.57) أن $\Pr[X_{r+1} \geq 0|\underline{x}]=1$ ، ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنـى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة خـسارة مربـع الخطـأ المتوازنة من العلاقتين (5.10)،(5.11) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبـؤ الإمكـان الأكبـر للمـشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.49) وكذلك

$$E_{pd}(X_s \mid \underline{x}) = \frac{K_1^{-1}\alpha}{(s-r-1)!}\Gamma(\nu+s)\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)\int_0^{x_r}x_s\nu(x_s)$$
$$\left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1}[\delta-\ln u(x_s)]^{-(\nu+s)}dx_s, \tag{5.58}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=r+1$ نحصل على $\hat{x}_{r+1_{(ML)}}$ من العلاقة (5.50) ويكون:

$$E_{pd}(X_{r+1} \mid \underline{x}) = K_1^{-1}\alpha\Gamma(\nu+r+1)\left(\prod_{i=1}^{r}\nu(x_i)\right)\int_0^{x_r}x_{r+1}\nu(x_{r+1})$$
$$[\delta-\ln u(x_{r+1})]^{-(\nu+r+1)}dx_{r+1}. \tag{5.59}$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطيـة الأسـية المتوازنة من العلاقتين (5.12)،(5.13) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبـؤ الإمكـان الأكبـر للمـشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.49) وكذلك

$$E_{pd}(e^{-aX_s} \mid \underline{x}) = \frac{K_1^{-1}\alpha}{(s-r-1)!}\Gamma(\nu+s)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\int_0^{x_r} e^{-ax_s}v(x_s) \left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1}[\delta-\ln u(x_s)]^{-(\nu+s)}dx_s, \tag{5.60}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=r+1$ نحصل على $\hat{x}_{r+1_{(ML)}}$ من العلاقة (5.50) ويكون:

$$E_{pd}(e^{-aX_{r+1}} \mid \underline{x}) = K_1^{-1}\alpha\,\Gamma(\nu+r+1)\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\int_0^{x_r} e^{-ax_{r+1}}v(x_{r+1}) [\delta-\ln u(x_{r+1})]^{-(\nu+r+1)}dx_{r+1}, \tag{5.61}$$

حيث K_1 يعطى من العلاقة (3.123).

التنبؤ باستخدام توزيع قبلي غير معلم للمعلمة θ

تنبؤ الفترة:

نحصل على حدي تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا $x_s, s=r+1, r+2, ...$ من العلاقـة (5.19) كما يلي:

$$\begin{aligned}\Pr[X_s \geq \mu \mid \underline{x}] &= \frac{J_1^{-1}\alpha}{(s-r-1)!}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right) \int_\mu^{x_r}\int_0^{\infty} \theta^{s-1}v(x_s)u^{\theta}(x_s)\left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1}d\theta\, dx_s, \\ &= \frac{J_1^{-1}\alpha}{(s-r-1)!}\Gamma(s)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right) \int_\mu^{x_r}v(x_s)\left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1}[-\ln u(x_s)]^{-s}dx_s,\end{aligned} \tag{5.62}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=r+1$ نحصل على

$$\begin{aligned}\Pr[X_{r+1} \geq \mu \mid \underline{x}] &= \alpha J_1^{-1}\Gamma(r+1)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right) \int_\mu^{x_r}v(x_{r+1})[-\ln u(x_{r+1})]^{-(r+1)}dx_{r+1} \\ &= J_1^{-1}\Gamma(r)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\left\{[-\ln u(x_r)]^{-r}-[-\ln u(\mu)]^{-r}\right\},\end{aligned} \tag{5.63}$$

نلاحظ من (5.63) أن $\Pr[X_{r+1} \geq 0 | \underline{x}] = 1$ ، ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقتين (5.10)،(5.20) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.49) وكذلك

$$E_{pd}(X_s | \underline{x}) = \frac{J_1^{-1}\alpha}{(s-r-1)!}\Gamma(s)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\int_0^{x_r} x_s v(x_s) \left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1}[-\ln u(x_s)]^{-s} dx_s, \tag{5.64}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s = r+1$ نحصل على $\hat{x}_{r+1_{(ML)}}$ من العلاقة (5.50) ويكون:

$$E_{pd}(X_{r+1} | \underline{x}) = J_1^{-1}\alpha\,\Gamma(r+1)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\int_0^{x_r} x_{r+1} v(x_{r+1}) [-\ln u(x_{r+1})]^{-(r+1)} dx_{r+1}. \tag{5.65}$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقتين (5.12)،(5.21) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.49) وكذلك

$$E_{pd}(e^{-aX_s} | \underline{x}) = \frac{J_1^{-1}\alpha}{(s-r-1)!}\Gamma(s)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\int_0^{x_r} e^{-ax_s} v(x_s) \left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1}[-\ln u(x_s)]^{-s} dx_s, \tag{5.66}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s = r+1$ نحصل على $\hat{x}_{r+1_{(ML)}}$ من العلاقة (5.50) ويكون:

$$E_{pd}(e^{-aX_{r+1}} | \underline{x}) = J_1^{-1}\alpha\,\Gamma(r+1)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\int_0^{x_r} e^{-ax_{r+1}} v(x_{r+1}) [-\ln u(x_{r+1})]^{-(r+1)} dx_{r+1}. \tag{5.67}$$

حيث J_1 تعطى من العلاقة (3.130).

التنبؤ عندما تكون المعلمتان α,θ مجهولتين:

نحصل على تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا $x_s, s = r+1, r+2,...$ وذلك بفرض أن المعلمتين α,θ متغيران عشوائيان ويتبعان توزيعات قبلية معلمة وأخرى غير معلمة.

التنبؤ باستخدام توزيعات قبلية معلمة للمعلمتين α,θ

تنبؤ الفترة

نحصل على حدي تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا $x_s, s = r+1, r+2,...$ من العلاقة (5.31) كما يلي:

$$\Pr[X_s \geq \mu \,|\, \underline{x}] = \frac{K_2^{-1}}{(s-r-1)!}\int_{\mu}^{x_r}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \alpha^{r+d-\nu}\theta^{\nu+s-1} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) v(x_s)\, u^{\theta}(x_s)\left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1} d\alpha\, d\theta\, dx_s, \tag{5.68}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s = r+1$ نحصل على

$$\Pr[X_{r+1} \geq \mu \,|\, \underline{x}] = K_2^{-1}\int_{\mu}^{x_r}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \alpha^{r+d-\nu}\theta^{\nu+r} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) v(x_{r+1})\, u^{\theta}(x_{r+1})\, d\alpha\, d\theta\, dx_{r+1}, \tag{5.69}$$

ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من العلاقة (5.69) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقتين (5.10)،(5.32) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.54) وكذلك

$$E_{pd}(X_s \,|\, \underline{x}) = \frac{K_2^{-1}}{(s-r-1)!}\int_0^{x_r}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x_s\, \alpha^{r+d-\nu}\theta^{\nu+s-1} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) v(x_s) u^{\theta}(x_s)\left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1} d\alpha\, d\theta\, dx_s, \tag{5.70}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=r+1$ نحصل على $\hat{x}_{r+1_{(ML)}}$ من العلاقة (5.55) ويكون:

$$E_{pd}(X_{r+1}\,|\,\underline{x})=K_2^{-1}\int_0^{x_r}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}x_{r+1}\,\alpha^{r+d-v}\theta^{v+r}\,e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)v(x_{r+1})u^{\theta}(x_{r+1})\;d\alpha\,d\theta\,dx_{r+1}. \tag{5.71}$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطيـة الأسـية المتوازنة من العلاقتين (5.12)،(5.33) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبـؤ الإمكـان الأكبـر للمـشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.54) وكذلك

$$E_{pd}(e^{-aX_s}\,|\,\underline{x})=\frac{K_2^{-1}}{(s-r-1)!}\int_0^{x_r}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-ax_s}\,\alpha^{r+d-v}\theta^{v+s-1}\,e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)v(x_s)u^{\theta}(x_s)\left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1}d\alpha\,d\theta\,dx_s, \tag{5.72}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=r+1$ نحصل على $\hat{x}_{r+1_{(ML)}}$ من العلاقة (5.55) ويكون:

$$E_{pd}(e^{-aX_{r+1}}\,|\,\underline{x})=K_2^{-1}\int_0^{x_r}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-ax_{r+1}}\,\alpha^{r+d-v}\theta^{v+r}\,e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)v(x_{r+1})u^{\theta}(x_{r+1})\;d\alpha\,d\theta\,dx_{r+1}, \tag{5.73}$$

حيث K_2 تعطى من العلاقة (3.139).

توزيع قبلي غير معلم للمعلمتين α,θ

تنبؤ الفترة

نحصل على حدي تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا $x_s, s=r+1,r+2,...$ من العلاقـة (5.39) كما يلي:

$$\Pr[X_s\geq\mu\,|\,\underline{x}]=\frac{J_2^{-1}}{(s-r-1)!}\int_{\mu}^{x_r}\int_0^{\infty}\int_0^{c}\alpha^{r+1}\theta^{s-1}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)v(x_s)\,u^{\theta}(x_s)\left(\ln\frac{u(x_r)}{u(x_s)}\right)^{s-r-1}d\alpha\,d\theta\,dx_s, \tag{5.74}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=r+1$ يكون

$$\Pr[X_{r+1} \geq \mu | \underline{x}] = J_2^{-1} \int_{\mu}^{x_r} \int_0^{\infty} \int_0^c \alpha^{r+1} \theta^r \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) v(x_{r+1}) \, u^{\theta}(x_{r+1}) \; d\alpha \, d\theta \, dx_{r+1}. \tag{5.75}$$

ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من العلاقة (5.75) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقتين (5.10)،(5.40) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.54) وكذلك

$$E_{pd}(X_s | \underline{x}) = \frac{J_2^{-1}}{(s-r-1)!} \int_0^{x_r} \int_0^{\infty} \int_0^c x_s \, \alpha^{r+1} \theta^{s-1} \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) v(x_s) u^{\theta}(x_s) \left(\ln \frac{u(x_r)}{u(x_s)} \right)^{s-r-1} d\alpha \, d\theta \, dx_s, \tag{5.76}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s = r+1$ نحصل على $\hat{x}_{r+1_{(ML)}}$ من العلاقة (5.55) ويكون:

$$E_{pd}(X_{r+1} | \underline{x}) = J_2^{-1} \int_0^{x_r} \int_0^{\infty} \int_0^c x_{r+1} \, \alpha^{r+1} \theta^r \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) v(x_{r+1}) \, u^{\theta}(x_{r+1}) \; d\alpha \, d\theta \, dx_{r+1}. \tag{5.77}$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية x_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقتين (5.12)،(5.41) حيث $\hat{x}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية x_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (5.54) وكذلك

$$E_{pd}(e^{-aX_s} | \underline{x}) = \frac{J_2^{-1}}{(s-r-1)!} \int_0^{x_r} \int_0^{\infty} \int_0^c e^{-ax_s} \, \alpha^{r+1} \theta^{s-1} \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) v(x_s) u^{\theta}(x_s) \left(\ln \frac{u(x_r)}{u(x_s)} \right)^{s-r-1} d\alpha \, d\theta \, dx_s, \tag{5.78}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s = r+1$ نحصل على $\hat{x}_{r+1_{(ML)}}$ من العلاقة (5.55) ويكون:

$$E_{pd}(e^{-aX_{r+1}} \mid \underline{x}) = K_2^{-1} \int_0^{x_r} \int_0^{\infty} \int_0^{c} e^{-ax_{r+1}} \alpha^{r+1} \theta^r \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) v(x_{r+1})\, u^{\theta}(x_{r+1})\; d\alpha\, d\theta\, dx_{r+1} \quad (5.79)$$

حيث J_2 تعطى من العلاقة (3.148).

واضح من العلاقات السابقة أن حساب تنبؤات بييز في حالة عدم معلومية المعلمتين يستلزم إجراء عمليات حسابية معقدة لذلك سيتم استخدام إحدى طرق سلسلة ماركوف (MCMC) لإنجازها.

(٥-٦) مثال تطبيقي Application Example

باستخدام بيانات المثال التطبيقي الذي سبق استخدامه في الفصل الثالث في البند (٣-٦) تم حساب تنبؤات بييز (فترة ونقطة) للقيمة المسجلة الدنيا المستقبلية باستخدام نتائج البند (٥-٥) على النحو التالي:

تم الحصول على عينة القيم المسجلة الدنيا من بيانات هذا المثال فكانت على الصورة:

$$\underline{x} = \{3.7, 2.74, 2.73, 2.5, 1.47, 1.41, 1.36, 0.98, 0.81, 0.39\}$$

واعتمادا عليها تم حساب حدود تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز للقراءة التالية مباشرة x_{11} باستخدام توزيعات قبلية معلمة وأخرى غير معلمة لمعلمتي التوزيع وتم تسجيل النتائج في الجدول (٥-١).

جدول (٥-١): تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (نقطة وفترة) للقيمة المسجلة الدنيا x_{r+1} لبيانات المثال التطبيقي باستخدام توزيعات قبلية معلمة و أخرى غير معلمة لمعلمتي التوزيع حيث $d = 2, b = 0.5, \nu = 4, \omega = 0.5, c = 2$.

x_{r+1}			*interval predictions*				*point predictions*			
			90%		*95%*		*ML*	*Bayes (MCMC)*		
								BSEL	*BLINEX*	
									a	
			L	*U*	*L*	*U*			*-2*	*2*
x_{11}	*ML*		0.2392	0.3866	0.2146	0.3883	0.3344			
	Bayes (MCMC)	*Inf.*	0.3453	0.6922	0.3393	0.7123		0.3521	0.3455	0.3709
		Non-Inf.	0.3662	0.6537	0.3405	0.6688		0.3676	0.3745	0.3690

(٥-٧) دراسة المحاكاة Simulation Study

للوقوف على مدى دقة وكفاءة نتائج التنبؤات التي تم الحصول عليها في هذا الفصل، تم انجاز دراسة المحاكاة كما يلي:

تم توليد مجموعة من القيم المسجلة الدنيا بأحجام مختلفة وتم حساب تنبؤات الإمكان الأكبـر وتنبؤات بييز (فترة ونقطة) باستخدام نتائج البند (٥-٥) طبقا للخطوات التالية:

١- تم توليد عينات من قيم مسجلة دنيا من توزيع وايبل الأسي بالمعلمة θ في حالة معلومية المعلمة α وبالمعلمتين (α,θ) في حالة عدم معلوميـة المعلمتـين بأحجـام مختلفـة $r=(3,5,7)$ باستخدام طريقة التوليد التي تم عرضها في الفصل الثـاني مـع العلاقـة (2.63) (بنفس الأسلوب المتبع في الفصل الثالث)، وتم التنبؤ بالقيمة المسجلة المـستقبلية في كل حالة اعتمادا على دالة خسارة متماثلة BSEL وأخرى غير متماثلة BLINEX عند أكثر من قيمة لمعلمة الشكل a، واعتمادا على التوزيعات القبلية المعلمة وغيـر المعلمـة والتي تم افتراضها في هذا الفصل.

٢- بالنسبة لتنبؤات الفترة تم توليد 1000 قيمة مسجلة من توزيع وايبل الأسي بقيم المعـالم التي سبق التوليد بها في الخطوة السابقة، وتم حساب النسبة المئوية لمـستويات التنبـؤ للقيمة المسجلة الأولى المستقبلية، وتم عرض النتائج العددية فـي الجـداول (٥-٢) - (٥-٥).

جدول (٥-٢): تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (فترة ونقطة) للقيمة المسجلة الدنيا x_{r+1} عنـدما $\alpha = 2$ حيث $\omega = 0.5$,$\delta = 2,\ \nu = 4, \theta = 2.5959$.

x_{r+1}		interval predictions						point predictions			
		90%			95%			ML	Bayes		
									BSEL	BLINEX	
										a	
		L	U	%	L	U	%			-2	2
x_5	ML	0.3290	0.6138	88.1	0.2867	0.6175	94.3	0.5093			
	Bayes	0.2484	0.6124	89.5	0.1922	o.6168	95.2		0.4958	0.5020	0.4881
x_7	ML	0.2273	0.4052	89.5	0.1991	0.4073	94.5	0.3414			
	Bayes	0.1845	0.4045	91.7	0.1482	0.4070	94.3		0.3346	0.3368	0.3318
x_9	ML	0.2444	0.3795	91.3	0.2208	0.3810	95.4	0.3323			
	Bayes	0.1994	0.3787	92.6	0.1676	0.3806	95.8		0.3346	0.3262	0.3227

جدول (٥-٣): تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (فترة ونقطة) للقيمة المسجلة الدنيا x_{r+1} عنـدما $\alpha = 2$ حيث $\theta = 1.5,\ \omega = 0.5$.

x_{r+1}		interval predictions						point predictions			
		90%			95%			ML	Bayes		
									BSEL	BLINEX	
										a	
		L	U	%	L	U	%			-2	2
x_5	ML	0.3758	0.6638	88.7	0.3317	0.6675	95.1	0.5587			
	Bayes	0.2566	0.6637	91.2	0.1779	0.6675	95.5		0.5450	0.5526	0.5349
x_7	ML	0.0922	0.2243	90.5	0.0749	0.2260	95.4	0.1747			
	Bayes	0.0662	0.2242	91.5	0.0442	0.2260	95.7		0.1715	0.1727	0.1702
x_9	ML	0.1615	0.2805	91.7	0.1421	0.2819	95.6	0.2383			
	Bayes	0.1408	0.2805	92.0	0.1145	0.2819	96.2		0.2359	0.2369	0.2349

جدول (٥-٤): تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (فترة ونقطة) للقيمة المسجلة الدنيا x_{r+1} حيث $d=2, b=0.5, \nu=3, \alpha=1.5040, \theta=3.1820, \omega=0.5$.

x_{r+1}		interval predictions						point predictions			
		90%			95%			ML	Bayes(MCMC)		
									BSEL	BLINEX	
										a	
		L	U	%	L	U	%			-2	2
x_5	ML	0.2619	0.7454	89.2	0.2103	0.7533	94.2	0.5516			
	Bayes (MCMC)	0.6239	0.6983	91.0	0.5866	1.0033	95.5		0.6684	0.6887	0.6508
x_7	ML	0.2466	0.5134	91.5	0.2100	0.5171	94.5	0.4137			
	Bayes (MCMC)	0.4141	0.7086	91.7	0.3803	0.7285	95.7		0.4908	0.5015	0.4814
x_9	ML	0.3499	0.5621	91.8	0.3150	0.5646	94.6	0.4866			
	Bayes (MCMC)	0.4752	0.7958	92.5	0.4461	0.8077	96.3		0.5611	0.5715	0.5518

جدول (٥-٥): تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (فترة ونقطـة) للقيمـة المـسجلة الـدنيا x_{r+1} حيث $\alpha=2, \theta=1.5, \omega=0.5, c=2$.

x_{r+1}		interval predictions						point predictions			
		90%			95%			ML	Bayes(MCMC)		
									BSEL	BLINEX	
										a	
		L	U	%	L	U	%			-2	2
x_5	ML	0.0390	0.1933	90.5	0.0268	0.1961	95.3	0.1288			
	Bayes (MCMC)	0.0824	0.3830	91.2	0.0481	0.4345	94.6		0.1817	0.1893	0.1750
x_7	ML	0.0240	0.0958	90.7	0.0173	0.0969	94.8	0.0667			
	Bayes (MCMC)	0.0505	0.3300	92.5	0.0339	0.3614	95.5		0.1268	0.1342	0.1203
x_9	ML	0.0885	0.1813	91.1	0.0748	0.1825	95.7	0.1476			
	Bayes (MCMC)	0.1429	0.4483	92.2	0.1270	0.4617	96.0		0.2201	0.2298	0.2115

(٥-٨) التعليق على النتائج Comments on the Results

في هذا الفصل تم استخدام أسلوب تنبؤ العينة الواحدة للتنبؤ (بفترة أوبنقطة) بالقيمة المسجلة الدنيا المستقبلية في عينة من توزيع وايبل الأسي ذي المعلمتين، وتم استخدام طريقة الإمكان الأكبر وطريقة بييز للتنبؤ باعتبار حالة التوزيعات القبلية المعلمة وغير المعلمة لمعلمتي التوزيع، أيضا تم استخدام البيانات الخاصة بالمثال التطبيقي الوارد في الفصل الثالث لتوضيح كيفية الحصول على التنبؤات المختلفة في حالة توفر عينة من البيانات الحقيقية من واقع تجربة فعلية وتم عرض النتائج في الجدول (٥-١)، ورغبة منا في اختبار دقة النتائج التي تم الحصول عليها تم انجاز دراسة المحاكاة باستخدام أحجام مختلفة للعينات، ومن خلال النتائج العددية لهذه الدراسة تم رصد الملاحظات الآتية:

١- من الجداول (٥-٢) – (٥-٥) يتضح لنا أن فترات تنبؤ الإمكان الأكبر وفترات تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا الأولى من العينة المستقبلية متقاربة وأعطت نسبا جيدة وذلك بمقارنة النسب المئوية الناتجة بالنسبة المئوية الفعلية (95%) أو (90%)، وهذا يعطينا السند لأن نوصي باستخدام تنبؤ الإمكان الأكبر والتنبؤ البييزي في حساب فترات التنبؤ.

٢- تم حل مشكلة الحسابات المعقدة التي تنتج في استدلالات بييز اعتمادا على التوزيعات القبلية المعلمة وغير المعلمة (في حالة عدم معلومية معلمتي التوزيع) باستخدام إحدى طرق سلسلة ماركوف وحصلنا على نتائج جيدة.

٣- نلاحظ بصفة عامة أن أطوال فترات التنبؤ تقل بزيادة أحجام العينات.

٤- كل النتائج العددية في هذا الباب تم انجازها باستخدام حزمة برامج ماثيماتيكا الإصدار السابع (Mathematica 7.0).

نتائج هذا الفصل تعتبر جديدة في مجال استدلالات بييز لتوزيع وايبل الأسي والمعتمدة على الإحصاءات المرتبة المعممة، والجدير بالذكر أن بعض نتائج هذا الفصل تم إرسالها للنشر في مجلة من المجلات الإحصائية المتخصصة.

الفصل السادس

تنبؤ العينتين لإحصاءات مرتبة معممة
من توزيع وايبل الأسي

Two-Sample Prediction for Generalized Order Statistics from the Exponentiated Weibull Distribution

(٦-١) مقدمـة Introduction

يقدم هذا الباب دراسة ومناقشة تنبؤات الإمكان الأكبر (فترة ونقطة) إضافة إلى تنبؤات بييز (فترة ونقطة) لقيم مستقبلية من توزيع وايبل الأسي ذي المعلمتـين، وذلـك باسـتخدام أسلوب العينتين اعتمادا على دوال خسارة متماثلة وغير متماثلة، وباستخدام التوزيعات القبلية المعلمة وغير المعلمة التي سبق استخدامها في الفصل الثالث.

(٦-٢) التنبؤ باستخدام أسلوب العينتين

Two-Sample Prediction

بفـرض أن $X(1,n,\tilde{m},k), X(2,n,\tilde{m},k),..., X(r,n,\tilde{m},k)$ هـي أول r مـن الإحصاءات المرتبة المعممة من عينة حجمها n من توزيـع وايبـل الأسـي بـالمعلمتين α,θ، حيث $\tilde{m}=(m_1,...,m_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}, k>0$ وأن هناك عينة أخرى مستقبلية حجمهـا N مـن إحـصاءات مرتبـة معممـة مـستقلة مـن نفـس المجتمـع ولـتكن $Y(1,N,\tilde{M},K), Y(2,N,\tilde{M},K),..., Y(N,N,\tilde{M},K)$ حيـث $K>0$ ، وكـذلك $\tilde{M}=(M_1,...,M_{N-1})\in\mathbb{R}^{N-1}$ والهدف هو التنبؤ بالإحصاء المرتب المعمم المستقبلي

$$Y_s \equiv Y(s,N,\tilde{M},K),\ s=1,2,...,N,$$

وبفرض أن $Y_s, 1\le s\le N$ ترمز للإحصاء المرتب المعمم ذي الترتيـب s فـي العينـة المستقبلية ذات الحجم N فإن دالة كثافة الاحتمال لـ Y_s يتم الحصول عليها من العلاقـات (2.53)،(2.55) كما يلي:

الحالة الأولى: إذا كانت

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_{r-1} = M ,$$

فإن دالة كثافة الاحتمال المشروطة للإحصاء المرتب المعمم $Y_s ,\ 1 \le s \le N$ تعطى بالعلاقة:

$$g_1^*(y_s \mid \theta) = \begin{cases} \dfrac{K^s}{(s-1)!} \alpha\, \theta\, v(y_s)\, u^{\theta}(y_s) \zeta^{K-1}(y_s) \left[-\ln \zeta(y_s) \right]^{s-1}, & M = -1, \\ \dfrac{C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}} \alpha \theta v(y_s)\, u^{\theta}(y_s) \zeta^{\Upsilon_s - 1}(y_s) \\ \qquad [1 - \zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}, & M \ne -1, \end{cases} \qquad (6.1)$$

حيث C_{s-1}^* و Υ_s و $\zeta(y_s)$ سبق تعريفها بالعلاقات (2.54)،(5.2) على التوالي.

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\Upsilon_i \ne \Upsilon_\ell, \qquad i \ne \ell,\ i, \ell \in \{1, \ldots, N-1\},$$

فإن دالة كثافة الاحتمال المشروطة للإحصاء المرتب المعمم $Y_s ,\ 1 \le s \le N$ تعطى بالعلاقة:

$$g_2^*(y_s \mid \theta) = C_{s-1}^* \alpha\, \theta\, v(y_s) u^{\theta}(y_s) \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s)\, \zeta^{\Upsilon_i - 1}(y_s), \quad 1 \le i \le s \le N , \qquad (6.2)$$

حيث C_{s-1}^* و Υ_s و $a_i^*(s)$ سبق تعريفها بالعلاقات (2.54)،(2.56) على التوالي.

(٦-٣) التنبؤ في حالة معلومية المعلمة α

Prediction when α is Known

سوف نفترض في هذه الحالة أن المعلمة α معلومة والمعلمة θ مجهولة ولكنها متغير عشوائي يتبع توزيعا قبليا معلما وآخر غير معلم كما في الفصل الثالث.

(٦-٣-١) تنبؤ الإمكان الأكبر:

Maximum likelihood prediction

إن تنبؤ الإمكان الأكبر يمكن حسابه لجميع الحالات الممكنة لقيم $\tilde{M}$ باستخدام العلاقات (6.1)،(6.2) بعد استبدال معلمة الشكل θ في كل منها بقيمة مقدر الإمكان الأكبر لها $\hat{\theta}_{ML}$ والذي سبق حسابه من العلاقة (3.5) في الفصل الثالث كما يلي:

الحالة الأولى: إذا كانت

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_{r-1} = M ,$$

يمكن حساب تنبؤات الإمكان الأكبر في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

نحصل على حدي تنبؤ الإمكان الأكبر للإحصاء المرتب المعمم $Y_s,\ 1 \le s \le N$ بحساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[Y_s \ge \mu | \underline{x}] = \int_{\mu}^{\infty} g_1^*(y_s | \hat{\theta}_{ML})\, dy_s,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K^s \alpha \hat{\theta}_{ML}}{(s-1)!} \displaystyle\int_{\mu}^{\infty} v(y_s) u^{\hat{\theta}_{ML}}(y_s)\, \zeta^{K-1}(y_s) \left[-\ln \zeta(y_s)\right]^{s-1} dy_s, & M = -1, \\ \dfrac{C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}} \alpha \hat{\theta}_{ML} \displaystyle\int_{\mu}^{\infty} v(y_s)\, u^{\hat{\theta}_{ML}}(y_s) \zeta^{\Upsilon_s - 1}(y_s) & \\ \qquad [1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1} dy_s, & M \ne -1. \end{cases} \tag{6.3}$$

ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للإحصاء المرتب المعمم $Y_s,\ 1 \le s \le N$ بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من العلاقة (6.3) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤ النقطة:

يتم الحصول على تنبؤ نقطة الإمكان الأكبر بحساب متوسط العلاقة (6.1) بعد استبدال معلمة الشكل θ بقيمة مقدر الإمكان الأكبر لها $\hat{\theta}_{ML}$ كما يلي:

$$\hat{y}_{s_{(ML)}} = E_{g_1^*}(Y_s) = \int_0^{\infty} y_s g_1^*(y_s | \hat{\theta}_{ML}) dy_s,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K^s \alpha \hat{\theta}_{ML}}{(s-1)!} \displaystyle\int_0^{\infty} y_s v(y_s) u^{\hat{\theta}_{ML}}(y_s)\, \zeta^{K-1}(y_s) \left[-\ln \zeta(y_s)\right]^{s-1} dy_s, & M = -1, \\ \dfrac{C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}} \alpha\, \hat{\theta}_{ML} \displaystyle\int_0^{\infty} y_s v(y_s) u^{\hat{\theta}_{ML}}(y_s)\, \zeta^{\Upsilon_s - 1}(y_s) & \\ \qquad [1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1} dy_s, & M \ne -1. \end{cases} \tag{6.4}$$

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\Upsilon_i \ne \Upsilon_\ell,\ i \ne \ell,\ i, \ell \in \{1, ..., n-1\},$$

يمكن حساب تنبؤات الإمكان الأكبر في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

نحصل على حدي تنبؤ الإمكان الأكبر للإحصاء المرتب المعمم $Y_s,\ 1 \le s \le N$ بحساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[Y_s \geq \mu \,|\, \underline{x}] = \int_{\mu}^{\infty} g_2^*(y_s \,|\, \hat{\theta}_{ML})\, dy_s\,,$$
$$= C_{s-1}^*\, \alpha\, \hat{\theta}_{ML} \int_{\mu}^{\infty} v(y_s)\, u^{\hat{\theta}_{ML}}(y_s) \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s)\, \zeta^{\Upsilon_i - 1}(y_s)\, dy_s\,, \tag{6.5}$$

ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للإحصاء المرتـب المعمـم $Y_s,\ 1 \leq s \leq N$ بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من العلاقة (6.5) باستخدام العلاقـة (2.52).

تنبؤ النقطة:

يتم الحصول على تنبؤ نقطة الإمكان الأكبر بحساب متوسط العلاقة (6.2) كما يلي:

$$\hat{y}_{s_{(ML)}} = E_{g_2^*}(Y_s) = \int_0^{\infty} y_s\, g_2^*(y_s \,|\, \hat{\theta}_{ML})\, dy_s\,,$$
$$= C_{s-1}^*\, \alpha\, \hat{\theta}_{ML} \int_0^{\infty} y_s\, v(y_s)\, u^{\hat{\theta}_{ML}}(y_s) \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s)\, \zeta^{\Upsilon_i - 1}(y_s)\, dy_s\,. \tag{6.6}$$

(٦-٣-٢) تنبؤ بييز Bayesian prediction

نوجد الآن حدود تنبؤ بييز للإحصاء المرتب المعمم ذي الترتيب s في العينة المستقبلية ذات الحجم N ولـيكن $Y_s, 1 \leq s \leq N$ اعتمـادا علـى الإحـصاءات المرتبـة المعممـة $x_j,\ j = 1, 2, ..., r$ لحالات مختلفة من التوزيعات القبلية للمعلمة θ.

(٦-٣-٢-١) توزيع قبلي معام للمعلمة θ

Informative prior distributions for θ

سوف نفترض في هذه الحالة أن المعلمة θ متغير عشوائي وتتبع توزيعا قبليـا معلمـا يأخذ الشكل (3.21).

الحالة الأولى: إذا كانت

$$M_1 = M_2 = ... = M_{r-1} = M\,,$$

يمكن حساب تنبؤات بييز في هذه الحالة كما يلي:

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بالتعويض مـن العلاقتـين (6.1)،(3.22) فـي العلاقة (2.50) في الصورة التالية:

$$H_1^*(y_s \mid \underline{x}) = \int_0^\infty \pi_1^*(\theta \mid \underline{x}) g_1^*(y_s \mid \theta) d\theta,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K_1^{-1} K^s \alpha v(y_s)}{(s-1)!} \int_0^\infty \theta^{r+\nu} e^{-\delta\theta} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) u^\theta(y_s) \\ \quad \zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln \zeta(y_s)\right]^{s-1} d\theta, \qquad M = -1, \\ \dfrac{K_1^{-1} C_{s-1}^* \alpha v(y_s)}{(s-1)!(M+1)^{s-1}} \int_0^\infty \theta^{r+\nu} e^{-\delta\theta} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) u^\theta(x_s) \\ \quad \zeta^{\Upsilon_s - 1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1} d\theta, \quad M \neq -1, \end{cases} \tag{6.7}$$

حيث K_1 , $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ تعطى بالعلاقتين (3.2) ,(3.23) على التوالي.

ونأتي الآن لحساب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

للحصول على حدي تنبؤ بييز للإحصاء المرتب المعمم $Y_s, 1 \le s \le N$ في العينة المستقبلية ذات الحجم N فإننا نقوم بحساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[Y_s \ge \mu \mid \underline{x}] = \int_\mu^\infty H_1^*(y_s \mid \underline{x}) dx_s,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K_1^{-1} K^s \alpha}{(s-1)!} \int_\mu^\infty \int_0^\infty \theta^{r+\nu} e^{-\delta\theta} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) v(y_s) u^\theta(y_s) \\ \quad \zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln \zeta(y_s)\right]^{s-1} d\theta\, dy_s, \qquad M = -1, \\ \dfrac{K_1^{-1} C_{s-1}^* \alpha}{(s-1)!(M+1)^{s-1}} \int_\mu^\infty \int_0^\infty \theta^{r+\nu} e^{-\delta\theta} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) v(y_s) \\ \quad u^\theta(y_s) \zeta^{\Upsilon_s - 1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1} d\theta\, dy_s, \quad M \neq -1, \end{cases} \tag{6.8}$$

ويعطى حدا تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للإحصاء المرتب المعمم Y_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (6.8) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة الآتية:

$$\hat{y}_{s_{(BS)}} = \omega \hat{y}_{s_{(ML)}} + (1-\omega) E_{pd}(Y_s \mid \underline{x}), \tag{6.9}$$

حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (6.4)، $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبيز وتحسب كما يلي:

$$E_{pd}(Y_s|\underline{x})=\int_0^\infty y_s H_1^*(y_s|\underline{x})dy_s,$$
$$=\begin{cases}\dfrac{K_1^{-1}K^s\alpha}{(s-1)!}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty y_s\,\theta^{r+\nu}e^{-\delta\theta}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(y_s)u^\theta(y_s)\\ \qquad\zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\theta\,dy_s, & M=-1,\\ \dfrac{K_1^{-1}C_{s-1}^*\alpha}{(s-1)!(M+1)^{s-1}}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty y_s\,\theta^{r+\nu}e^{-\delta\theta}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(y_s)\\ \qquad u^\theta(y_s)\zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}d\theta\,dy_s, & M\neq-1.\end{cases}\tag{6.10}$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا يمكن الحصول على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالـة الخـسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة الآتية:

$$\hat{y}_{s_{(BL)}}=-\frac{1}{a}\ln[\omega e^{-a\hat{y}_{s(ML)}}+(1-\omega)E_{pd}(e^{-aY_s}|\underline{x})],\tag{6.11}$$

حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه مـن العلاقة (6.4)، $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبيز وتعطى من:

$$E_{pd}(e^{-aY_s}|\underline{x})=\int_0^\infty e^{-ay_s}H_1^*(y_s|\underline{x})dy_s,$$
$$=\begin{cases}\dfrac{K_1^{-1}K^s\alpha}{(s-1)!}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ay_s}\,\theta^{r+\nu}e^{-\delta\theta}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(y_s)u^\theta(y_s)\\ \qquad\zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\theta dy_s, & M=-1,\\ \dfrac{K_1^{-1}C_{s-1}^*\alpha}{(s-1)!(M+1)^{s-1}}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ay_s}\,\theta^{r+\nu}e^{-\delta\theta}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(y_s)\\ \qquad u^\theta(y_s)\zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}d\theta dy_s, & M\neq-1.\end{cases}\tag{6.12}$$

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\Upsilon_i\neq\Upsilon_\ell,\; i\neq\ell,\, i,\ell\in\{1,...,n-1\},$$

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بالتعويض من العلاقتين (3.22)،(6.2) في العلاقة (2.50) في الصورة التالية:

$$\begin{aligned} H_2^*(y_s \mid \underline{x}) &= \int_0^\infty \pi_1^*(\theta \mid \underline{x}) g_2^*(y_s \mid \theta) d\theta, \\ &= K_1^{-1} C_{s-1}^* \alpha\, v(y_s) \int_0^\infty \theta^{r+v} e^{-\delta\theta} \eta(\underline{x};\alpha,\theta)\, u^\theta(y_s) \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s) \zeta^{\Upsilon_i - 1}(y_s)\, d\theta, \end{aligned} \quad (6.13)$$

حيث تعطى $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ و K_1 بالعلاقتين (3.2)،(3.23) على التوالي.

ونأتي الآن لحساب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

الحصول على حدي تنبؤ بييز للإحصاء المرتب المعمم $Y_s, 1 \le s \le N$ في العينة المستقبلية ذات الحجم N يتطلب حساب الاحتمال التالي:

$$\begin{aligned} \Pr[Y_s \ge \mu \mid \underline{x}] &= \int_\mu^\infty H_2^*(y_s \mid \underline{x})\, dy_s, \\ &= K_1^{-1} C_{s-1}^* \alpha \int_\mu^\infty \int_0^\infty \theta^{r+v} e^{-\delta\theta} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) v(y_s)\, u^\theta(y_s) \\ &\quad \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s) \zeta^{\Upsilon_i - 1}(y_s)\, d\theta\, dy_s, \end{aligned} \quad (6.14)$$

ويمكن حساب حدي تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية y_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (6.14) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (6.9) حيث $\hat{y}_{s(ML)}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه من العلاقة (6.6) و $E_{pd}(.\mid \underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$\begin{aligned} E_{pd}(Y_s \mid \underline{x}) &= \int_0^\infty y_s H_2^*(x_s \mid \underline{x})\, dy_s, \\ &= K_1^{-1} C_{s-1}^* \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty y_s \theta^{r+v} e^{-\delta\theta} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) v(y_s)\, u^\theta(y_s) \\ &\quad \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s) \zeta^{\Upsilon_i - 1}(y_s)\, d\theta\, dy_s, \end{aligned} \quad (6.15)$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطيـة الأسـية المتوازنة من العلاقة (6.11) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المـستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه من العلاقة (6.6) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالـة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$\begin{aligned}E_{pd}(e^{-aY_s}|\underline{x}) &= \int_0^{\infty} e^{-ay_s} H_2^*(x_s|\underline{x})\,dy_s,\\ &= K_1^{-1}C_{s-1}^*\,\alpha\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-ay_s}\theta^{r+v}e^{-\delta\theta}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(y_s)u^{\theta}(y_s)\\ &\qquad \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s)\zeta^{\Upsilon_i-1}(y_s)\,d\theta\,dy_s.\end{aligned} \tag{6.16}$$

(٦-٣-٢-٢) توزيع قبلي غير معلم للمعلمة θ

Non-informative prior distributions for θ

سوف نفترض في هذه الحالة أن المعلمة θ متغير عشوائي وتتبع توزيعا قبليـا غيـر معلم يأخذ الشكل (3.32).

الحالة الأولى: إذا كانت

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_{r-1} = M,$$

في هذه الحالة يمكن الحصول على تنبؤات الفترة والنقطة كحالات خاصـة وذلـك بوضـع $v=0,\delta=0$ في علاقات البند السابق كما يلي:

تنبؤ الفترة:

يمكن حساب حدي تنبؤ بييز للإحصاء المرتب المعمم $Y_s, 1\le s\le N$ في العينـة المـستقبلية ذات الحجم N باستخدام الاحتمال التالي:

$$\Pr[Y_s \ge \mu|\underline{x}] = \int_{\mu}^{\infty} H_3^*(y_s|\underline{x})dx_s,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{J_1^{-1}K^s\alpha}{(s-1)!}\displaystyle\int_{\mu}^{\infty}\int_0^{\infty}\theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(y_s)u^{\theta}(y_s) \\ \quad \zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\theta\,dy_s, & M=-1,\\ \dfrac{J_1^{-1}C_{s-1}^*\alpha}{(s-1)!(M+1)^{s-1}}\displaystyle\int_{\mu}^{\infty}\int_0^{\infty}\theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(y_s) \\ \quad u^{\theta}(y_s)\zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}\,d\theta\,dy_s, & M\neq -1,\end{cases} \tag{6.17}$$

حيث تعطى $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ و J_1 بالعلاقتين (3.2)،(3.34) على التوالي، ويتم حساب الحد الأدنى $L(\underline{x})$ والحد الأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية Y_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقـة (6.17) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة نحـصل عليه من العلاقة (6.9) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والـذي سبق الحصول عليه في العلاقة (6.4)، $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالـة كثافـة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$E_{pd}(Y_s\,|\,\underline{x}) = \int_0^\infty y_s H_3^*(y_s\,|\,\underline{x})\,dy_s$$
$$= \begin{cases} \dfrac{K_1^{-1}K^s\alpha}{(s-1)!}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty y_s\,\theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(y_s)\,u^\theta(y_s) \\ \quad \zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\theta\,dy_s, & M=-1, \\ \dfrac{K_1^{-1}C_{s-1}^*\alpha}{(s-1)!(M+1)^{s-1}}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty y_s\,\theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)v(y_s) \\ \quad u^\theta(y_s)\,\zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}\,d\theta\,dy_s, & M\neq-1. \end{cases} \qquad (6.18)$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا يمكن الحصول على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالـة الخـسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (6.11) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمـشاهدة المستقبلية Y_s والمعطى بالعلاقة (6.4) ، $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافـة الاحتمال التنبؤية لبييز وتعطى من:

$$E_{pd}(e^{-aY_s}\,|\,\underline{x}) = \int_0^\infty e^{-ay_s}H_3^*(y_s\,|\,\underline{x})\,dy_s,$$
$$= \begin{cases} \dfrac{J_1^{-1}K^s\alpha}{(s-1)!}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ay_s}\,\theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,v(y_s)u^\theta(y_s) \\ \quad \zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\theta dy_s, & M=-1, \\ \dfrac{J_1^{-1}C_{s-1}^*\alpha}{(s-1)!(M+1)^{s-1}}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ay_s}\,\theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\,v(y_s) \\ \quad u^\theta(y_s)\,\zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}\,d\theta dy_s, & M\neq-1, \end{cases} \qquad (6.19)$$

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\Upsilon_i \neq \Upsilon_\ell,\ i \neq \ell,\ i, \ell \in \{1, ..., n-1\},$$

في هذه الحالة يمكن أيضا الحصول على تنبؤات الفترة والنقطة كحالات خاصة وذلك بوضع $\nu = 0, \delta = 0$ في العلاقات المقابلة لها في البند السابق كما يلي:

تنبؤ الفترة:

يمكن حساب حدي تنبؤ بييز للإحصاء المرتب المعمم $Y_s, 1 \le s \le N$ في العينـة المـستقبلية ذات الحجم N باستخدام الاحتمال التالي:

$$\begin{aligned} \Pr[Y_s \ge \mu \mid \underline{x}] &= \int_\mu^\infty H_4^*(y_s \mid \underline{x}) dy_s, \\ &= J_1^{-1} C_{s-1}^* \alpha \int_\mu^\infty \int_0^\infty \theta^r \eta(\underline{x}; \alpha, \theta) v(y_s) u^\theta(y_s) \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s) \zeta^{\Upsilon_i - 1}(y_s) d\theta\, dy_s, \end{aligned} \tag{6.20}$$

ويمكن حساب حدي تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية Y_s بمـستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (6.20) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة خـسارة مربـع الخطـأ المتوازنة من العلاقة (6.9) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمـشاهدة المـستقبلية Y_s والمعطى بالعلاقة (6.6) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$\begin{aligned} E_{pd}(Y_s \mid \underline{x}) &= \int_0^\infty y_s H_4^*(x_s \mid \underline{x})\, dy_s, \\ &= J_1^{-1} C_{s-1}^* \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty y_s \theta^r \eta(\underline{x}; \alpha, \theta) v(y_s) u^\theta(y_s) \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s) \zeta^{\Upsilon_i - 1}(y_s)\, d\theta\, dy_s, \end{aligned} \tag{6.21}$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطيـة الأسـية المتوازنة من العلاقة (6.11) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المـستقبلية Y_s والمعطى بالعلاقة (6.6) ، $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتعطى من:

$$E_{pd}(e^{-aY_s} \mid \underline{x}) = \int_0^\infty e^{-ay_s} H_2^*(x_s \mid \underline{x})\, dy_s,$$
$$= J_1^{-1} C_{s-1}^* \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ay_s} \theta^r \eta(\underline{x};\alpha,\theta) v(y_s) u^\theta(y_s) \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s) \zeta^{\Upsilon_i - 1}(y_s)\, d\theta\, dy_s, \qquad (6.22)$$

(٦-٤) التنبؤ في حالة عدم معلومية المعلمتين α,θ

The Prediction when α and θ are unknown

سوف نفترض في هذه الحالة أن كلا المعلمتين α,θ مجهولتان ولكنهما متغيران عشوائيان ويتبعان توزيعات قبلية معلمة وغير معلمة كما في الفصل الثالث.

(٦-٤-١) تنبؤ الإمكان الأكبر:

Maximum likelihood prediction

إن تنبؤ الإمكان الأكبر يمكن حسابه لجميع الحالات الممكنة لقيم $\tilde{M}$ باستخدام العلاقات (6.1)،(6.2) بعد استبدال المعلمتين α,θ في كل منها بقيمتي مقدري الإمكان الأكبر لهما $\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\theta}_{ML}$ واللذين سبق حسابهما من العلاقتين (3.4) و(3.5) في الفصل الثالث كما يلي:

الحالة الأولى: إذا كانت

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_{r-1} = M,$$

يمكن حساب تنبؤات الإمكان الأكبر في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

الحصول على حدي تنبؤ الإمكان الأكبر للإحصاء المرتب المعمم $Y_s,\ 1 \le s \le N$ يتطلب حساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[Y_s \ge \mu \mid \underline{x}] = \int_\mu^\infty g_1^*(y_s \mid \hat{\alpha}_{ML}, \hat{\theta}_{ML})\, dy_s,$$
$$= \begin{cases} \dfrac{K^s \hat{\alpha}_{ML} \hat{\theta}_{ML}}{(s-1)!} \displaystyle\int_\mu^\infty v(y_s) u^{\hat{\theta}_{ML}}(y_s) \zeta^{K-1}(y_s) [-\ln \zeta(y_s)]^{s-1} dy_s, & M = -1, \\ \dfrac{C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}} \hat{\alpha}_{ML} \hat{\theta}_{ML} \displaystyle\int_\mu^\infty v(y_s) u^{\hat{\theta}_{ML}}(y_s) \zeta^{\Upsilon_s - 1}(y_s) \\ \qquad [1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1} dy_s, & M \ne -1, \end{cases} \qquad (6.23)$$

ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للإحصاء المرتب المعمم $Y_s,\ 1 \le s \le N$ بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من العلاقة (2.52).

تنبؤ النقطة:

يتم الحصول على تنبؤ نقطة الإمكان الأكبر بحساب متوسط العلاقة (6.1) بعد استبدال المعالم α,θ بقيمتي مقدري الإمكان الأكبر لهما $\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML}$ كما يلي:

$$\hat{y}_{s_{(ML)}}=E_{g_1^*}(Y_s)=\int_0^\infty y_s\, g_1^*(y_s\,|\,\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML})\,dy_s,$$
$$=\begin{cases}\dfrac{K^s\hat{\alpha}_{ML}\hat{\theta}_{ML}}{(s-1)!}\displaystyle\int_0^\infty y_s\,v(y_s)\,u^{\hat{\theta}_{ML}}(y_s)\,\zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}dy_s, & M=-1,\\ \dfrac{C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}}\hat{\alpha}_{ML}\hat{\theta}_{ML}\displaystyle\int_0^\infty y_s v(y_s)\,u^{\hat{\theta}_{ML}}(y_s)\,\zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s)\\ \qquad\qquad [1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}dy_s, & M\neq-1.\end{cases}\qquad(6.24)$$

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\Upsilon_i\neq\Upsilon_\ell,\ i\neq\ell,\ i,\ell\in\{1,...,n-1\},$$

يمكن حساب تنبؤات الإمكان الأكبر في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

الحصول على حدي تنبؤ الإمكان الأكبر للإحصاء المرتب المعمم $Y_s,\ 1\le s\le N$ يتطلب حساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[Y_s\ge\mu\,|\,\underline{x}]=\int_\mu^\infty g_2^*(y_s\,|\,\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML})dy_s,$$
$$=C_{s-1}^*\,\hat{\alpha}_{ML}\,\hat{\theta}_{ML}\int_\mu^\infty v(y_s)u^{\hat{\theta}_{ML}}(y_s)\sum_{i=1}^s a_i^*(s)\,\zeta^{\Upsilon_i-1}(y_s)\,dy_s,\qquad(6.25)$$

ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للإحصاء المرتب المعمم $Y_s,\ 1\le s\le N$ بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من العلاقة (2.52).

تنبؤ النقطة:

يتم الحصول على تنبؤ نقطة الإمكان الأكبر بحساب متوسط العلاقة (6.2) بعد استبدال المعلمتين α,θ بقيمتي مقدري الإمكان الأكبر لهما كما يلي:

$$\hat{y}_{s_{(ML)}}=E_{g_2^*}(Y_s)=\int_0^\infty y_s\,g_2^*(y_s\,|\,\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML})dy_s,$$
$$=C_{s-1}^*\,\hat{\alpha}_{ML}\,\hat{\theta}_{ML}\int_0^\infty y_s v(y_s)u^{\hat{\theta}_{ML}}(y_s)\sum_{i=1}^s a_i^*(s)\,\zeta^{\Upsilon_i-1}(y_s)\,dy_s.\qquad(6.26)$$

(٦-٤-٢) تنبؤ بييز **Bayesian prediction**

نوجد الآن حدود تنبؤ بييز للإحصاء المرتب المعمم $Y_s,\ 1\le s\le N$ في العينة المستقبلية ذات الحجم N اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة $x_j,\ j=1,2,...,r$ باستخدام توزيعات قبلية معلمة وأخرى غير معلمة للمعلمتين α,θ.

(٦-٤-٢-١) توزيعات قبلية معلمة للمعلمتين $\alpha,\ \theta$

Informative prior distributions for $\alpha,\ \theta$

سوف نفترض في هذه الحالة أن المعلمتين α,θ متغيران عشوائيان يتبعان توزيعا قبليا معلما يأخذ الشكل (3.43).

الحالة الأولى: إذا كانت

$$M_1=M_2=...=M_{r-1}=M\ ,$$

يمكن حساب تنبؤات بييز في هذه الحالة كما يلي:

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بالتعويض من العلاقتين (6.1)،(3.44) في العلاقة (2.50) في الصورة التالية:

$$H_5^*(y_s\,|\,\underline{x})=\int_0^\infty\int_0^\infty \pi_3^*(\alpha,\theta\,|\,\underline{x})g_1^*(y_s\,|\alpha,\theta)d\alpha d\theta,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{K_2^{-1}K^s}{(s-1)!}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-v}\theta^{r+v}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(y_s)u^\theta(y_s)\,\zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\alpha d\theta, \qquad M=-1,\\ \dfrac{K_2^{-1}C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-v}\theta^{r+v}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(y_s)u^\theta(y_s)\,\zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}d\alpha d\theta, \qquad M\neq -1,\end{cases} \qquad (6.27)$$

حيث $K_2,\ \eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ تعطى بالمعادلات (3.2), (3.45) على التوالي.

ونأتي الآن لحساب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

نحصل على حدي تنبؤ بييز للإحصاء المرتب المعمم $Y_s,\ 1\le s\le N$ ، بحساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[Y_s \geq \mu \mid \underline{x}] = \int_{\mu}^{\infty} H_5^*(y_s \mid \underline{x})\, dy_s,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K_2^{-1} K^s}{(s-1)!} \int_{\mu}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \alpha^{r+d-\nu} \theta^{r+\nu} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ \quad v(y_s) u^{\theta}(y_s)\, \zeta^{K-1}(y_s) \left[-\ln \zeta(y_s)\right]^{s-1} d\alpha\, d\theta\, dy_s, \quad M = -1, \\ \dfrac{K_2^{-1} C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}} \int_{\mu}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \alpha^{r+d-\nu} \theta^{r+\nu} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ \quad v(y_s) u^{\theta}(y_s)\, \zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s) [1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1} d\alpha\, d\theta\, dy_s, \quad M \neq -1, \end{cases} \tag{6.28}$$

و يعطى حدا تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية Y_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (6.28) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (6.9) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (6.24)، و $E_{pd}(.\mid \underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب كما يلي:

$$E_{pd}(Y_s \mid \underline{x}) = \int_0^{\infty} y_s H_5^*(y_s \mid \underline{x})\, dy_s,$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K_2^{-1} K^s}{(s-1)!} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y_s \alpha^{r+d-\nu} \theta^{r+\nu} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ \quad v(y_s) u^{\theta}(y_s)\, \zeta^{K-1}(y_s) \left[-\ln \zeta(y_s)\right]^{s-1} d\alpha\, d\theta\, dy_s, \quad M = -1, \\ \dfrac{K_2^{-1} C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y_s \alpha^{r+d-\nu} \theta^{r+\nu} e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha} \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ \quad v(y_s) u^{\theta}(y_s) \zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s) [1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1} d\alpha\, d\theta\, dy_s, \, M \neq -1. \end{cases} \tag{6.29}$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا يمكن الحصول على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (6.11) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (6.24)، و $E_{pd}(.\mid \underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتعطى من:

$$E_{pd}(e^{-aY_s}\mid \underline{x})=\int_0^\infty e^{-ay_s}H_5^*(y_s\mid \underline{x})dy_s,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{K_2^{-1}K^s}{(s-1)!}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ay_s}\alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(y_s)u^\theta(y_s)\zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\alpha\, d\theta\, dy_s,\quad M=-1,\\ \dfrac{K_2^{-1}C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ay_s}\alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(y_s)u^\theta(y_s)\zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}d\alpha\, d\theta\, dy_s,\ M\neq-1.\end{cases}\tag{6.30}$$

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\Upsilon_i\neq\Upsilon_\ell,\ i\neq\ell,\ i,\ell\in\{1,...,n-1\},$$

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بالتعويض من العلاقتين (3.44)،(6.2) في العلاقة (2.50) في الصورة التالية:

$$H_6^*(y_s\mid \underline{x})=\int_0^\infty\int_0^\infty \pi_3^*(\alpha,\theta\mid \underline{x})g_2^*(y_s\mid\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta,$$

$$=K_2^{-1}C_{s-1}^*\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\tag{6.31}$$

$$v(y_s)u^\theta(y_s)\sum_{i=1}^{s}a_i^*(s)\zeta^{\Upsilon_i-1}(y_s)\,d\alpha\,d\theta,$$

ونأتي الآن لحساب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

الحصول على حدي تنبؤ بييز للإحصاء المرتب المعمم $Y_s,\ 1\le s\le N$ يتطلب حساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[Y_s\ge\mu\mid \underline{x}]=\int_\mu^\infty H_6^*(y_s\mid \underline{x})dy_s,$$

$$=K_2^{-1}C_{s-1}^*\int_\mu^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+d-\nu}\theta^{r+\nu}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\tag{6.32}$$

$$v(y_s)u^\theta(y_s)\sum_{i=1}^{s}a_i^*(s)\zeta^{\Upsilon_i-1}(y_s)\,d\alpha\,d\theta\,dy_s,$$

ويمكن حساب حدي تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (6.32) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (6.9) حيث $\hat{y}_{s(ML)}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والمعطى بالعلاقة (6.26)، و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$\begin{aligned} E_{pd}(Y_s|\underline{x}) &= \int_0^\infty y_s H_6^*(y_s|\underline{x})\,dy_s, \\ &= K_2^{-1}C_{s-1}^*\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty y_s\,\alpha^{r+d-v}\theta^{r+v}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ &\quad v(y_s)\,u^\theta(y_s)\sum_{i=1}^{s}a_i^*(s)\zeta^{\Upsilon_i-1}(y_s)\,d\alpha\,d\theta\,dy_s. \end{aligned} \qquad (6.33)$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (6.11) حيث $\hat{y}_{s(ML)}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والمعطى بالعلاقة (6.26)، و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$\begin{aligned} E_{pd}(e^{-aY_s}|\underline{x}) &= \int_0^\infty e^{-ay_s} H_6^*(y_s|\underline{x})\,dy_s, \\ &= K_2^{-1}C_{s-1}^*\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ay_s}\,\alpha^{r+d-v}\theta^{r+v}e^{-(\alpha^2+b\theta)/b\alpha}\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta) \\ &\quad v(y_s)\,u^\theta(y_s)\sum_{i=1}^{s}a_i^*(s)\zeta^{\Upsilon_i-1}(y_s)\,d\alpha\,d\theta\,dy_s. \end{aligned} \qquad (6.34)$$

(٦-٤-٢-٢) توزيعات قبلية غير معلمة للمعلمتين α, θ

Non-informative prior distributions for α, θ

سوف نفترض في هذه الحالة أن كلا من المعلمتين α,θ متغير عشوائي يتبع توزيعا قبليا غير معلم كما بالعلاقتين (3.54)،(3.55).

الحالة الأولى: إذا كانت

$$M_1 = M_2 = \dots = M_{r-1} = M,$$

يمكن حساب تنبؤات بييز في هذه الحالة كما يلي:

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بالتعويض من العلاقتين (3.56)،(6.1) في العلاقة (2.50) في الصورة التالية:

$$H_7^*(y_s\,|\,\underline{x})=\int_0^{\infty}\int_0^{c}\pi_4^*(\alpha,\theta\,|\,\underline{x})g_1^*(y_s\,|\alpha,\theta)\,d\alpha\,d\theta,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{J_2^{-1}K^s}{(s-1)!}\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{c}\alpha^{r+1}\theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(y_s)u^{\theta}(y_s)\,\zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\alpha\,d\theta, \quad M=-1,\\ \dfrac{J_2^{-1}C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}}\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{c}\alpha^{r+1}\theta^r\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(y_s)u^{\theta}(y_s)\,\zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}d\alpha\,d\theta,\ M\neq-1,\end{cases} \tag{6.35}$$

حيث $J_2,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ تعطى بالمعادلات (3.2) ,(3.57) على التوالي.

ونأتي الآن لحساب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

نحصل على حدي تنبؤ بييز للمشاهدة المستقبلية Y_s بحساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[Y_s\geq\mu\,|\,\underline{x}]=\int_{\mu}^{\infty}H_7^*(y_s\,|\,\underline{x})dy_s,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{J_2^{-1}K^s}{(s-1)!}\displaystyle\int_{\mu}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c}\alpha^{r+1}\theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(y_s)u^{\theta}(y_s)\,\zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\alpha\,d\theta\,dy_s, \quad M=-1,\\ \dfrac{J_2^{-1}C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}}\displaystyle\int_{\mu}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c}\alpha^{r+1}\theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(y_s)u^{\theta}(y_s)\,\zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}d\alpha\,d\theta\,dy_s,\ M\neq-1,\end{cases} \tag{6.36}$$

ويعطى حدا تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية x_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (6.36) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (6.9) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (6.24)، $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب كما يلي:

$$E_{pd}(Y_s\,|\,\underline{x})=\int_0^\infty y_s H_7^*(y_s\,|\,\underline{x})\,dy_s,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{J_2^{-1}K^s}{(s-1)!}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^c y_s\alpha^{r+1}\theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(y_s)u^\theta(y_s)\,\zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\alpha\, d\theta\, dy_s,\ \ M=-1,\\ \dfrac{J_2^{-1}C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^c y_s\alpha^{r+1}\theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(y_s)u^\theta(y_s)\zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}d\alpha\, d\theta\, dy_s,\ M\neq -1.\end{cases}\tag{6.37}$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا يمكن الحصول على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالـة الخـسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (6.11) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمـشاهدة المستقبلية Y_s والمعطى بالعلاقة (6.24)، $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافـة الاحتمال التنبؤية لبييز وتعطى من:

$$E_{pd}(e^{-aY_s}\,|\,\underline{x})=\int_0^\infty e^{-ay_s}\,H_7^*(y_s\,|\,\underline{x})\,dy_s,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{J_2^{-1}K^s}{(s-1)!}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^c e^{-ay_s}\alpha^{r+1}\theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(y_s)u^\theta(y_s)\zeta^{K-1}(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\alpha\, d\theta\, dy_s,\ \ M=-1,\\ \dfrac{J_2^{-1}C_{s-1}^*}{(s-1)!(M+1)^{s-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^c e^{-ay_s}\alpha^{r+1}\theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\\ \quad v(y_s)u^\theta(y_s)\zeta^{\Upsilon_s-1}(y_s)[1-\zeta^{M+1}(y_s)]^{s-1}d\alpha\, d\theta\, dy_s,\ M\neq -1.\end{cases}\tag{6.38}$$

الحالة الثانية: إذا كانت:

$$\Upsilon_i\neq\Upsilon_\ell,\ i\neq\ell,\ i,\ell\in\{1,\dots,n-1\},$$

نحصل على دالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز بالتعويض من العلاقتـين (3.56)،(6.2) فـي العلاقة (2.50) في الصورة التالية:

$$H_8^*(y_s\,|\,\underline{x})=\int_0^\infty\int_0^c \pi_3^*(\alpha,\theta|\underline{x})g_2^*(y_s\,|\alpha,\theta)\,d\alpha\, d\theta,$$

$$=J_2^{-1}C_{s-1}^*\int_0^\infty\int_0^c \alpha^{r+1}\theta^r\,\eta(\underline{x};\alpha,\theta)\tag{6.39}$$

$$v(y_s)u^\theta(y_s)\sum_{i=1}^{s}a_i^*(s)\zeta^{\Upsilon_i-1}(y_s)\,d\alpha\, d\theta,$$

ونأتي الآن لحساب تنبؤات الفترة والنقطة في هذه الحالة كما يلي:

تنبؤ الفترة:

الحصول على حدي تنبؤ بييز لأي مشاهدة مستقبلية Y_s يتطلب حساب الاحتمال التالي:

$$\Pr[Y_s \geq \mu | \underline{x}] = \int_{\mu}^{\infty} H_8^*(y_s | \underline{x})\, dy_s ,$$
$$= J_2^{-1} C_{s-1}^* \int_{\mu}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c} \alpha^{r+1}\theta^r\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \qquad (6.40)$$
$$v(y_s) u^{\theta}(y_s) \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s) \zeta^{\Upsilon_i -1}(y_s)\, d\alpha\, d\theta dy_s ,$$

ويمكن حساب حدي تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية Y_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (6.40) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (6.9) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والمعطى بالعلاقة (6.26)، و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$E_{pd}(Y_s | \underline{x}) = \int_0^{\infty} y_s H_8^*(y_s | \underline{x})\, dy_s ,$$
$$= J_2^{-1} C_{s-1}^* \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c} y_s\, \alpha^{r+1}\theta^r\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \qquad (6.41)$$
$$v(y_s) u^{\theta}(y_s) \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s) \zeta^{\Upsilon_i -1}(y_s)\, d\alpha\, d\theta dy_s ,$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (6.11) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والمعطى بالعلاقة (6.26)، و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من:

$$E_{pd}(e^{-aY_s} | \underline{x}) = \int_0^{\infty} e^{-a y_s} H_8^*(y_s | \underline{x})\, dy_s ,$$
$$= J_2^{-1} C_{s-1}^* \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{c} e^{-a y_s}\, \alpha^{r+1}\theta^r\, \eta(\underline{x};\alpha,\theta) \qquad (6.42)$$
$$v(y_s) u^{\theta}(y_s) \sum_{i=1}^{s} a_i^*(s) \zeta^{\Upsilon_i -1}(y_s)\, d\alpha\, d\theta dy_s .$$

(٦-٥) التنبؤ بالقيم المسجلة الدنيا كحالة خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة
Prediction of Lower Record Values as a Special Case of the Generalized order statistics

في هذا البند سوف نقوم بتخصيص النتائج التي تم الحصول عليها إلى القيم المسجلة الدنيا، بفرض أن العينة الأولى هي عينة مراقبة تتابعيا والعينة الثانية المستقبلية هي عينة من القيم المسجلة الدنيا (وهي الحالة التي فيها $M_1 = M_2 = ... = M_{r-1} = M = -1$). سوف نقوم بالتنبؤ عن الإحصاء المرتب المعمم $Y_s,\ 1 \le s \le N$ ذي الترتيب s في العينة المستقبلية ذات الحجم N. وكما سبق أن ذكرنا فإنه يمكن الحصول على القيم المسجلة الدنيا كحالة خاصة من الإحصاءات المرتبة المعممة بعد تحويلها إلى الإحصاءات المرتبة المعممة المقابلة باستبدال الدالة $1-F(x)$ بالدالة $F(x)$ (وهذا يكافئ استبدال الدالة $1-u^{\theta}(x)$ بالدالة $u^{\theta}(x)$) كما يلي:

(٦-٥-١) تنبؤ الإمكان الأكبر للقيم المسجلة الدنيا في العينة المستقبلية

نحصل الآن على تنبؤ الإمكان الأكبر للقيم المسجلة الدنيا في العينة المستقبلية ذات الحجم N كما يلي:

عندما تكون α معلومة:

أولا: تنبؤ الفترة:

نحصل على حدي تنبؤ الإمكان الأكبر للقيمة المسجلة الدنيا $Y_s,\ 1 \le s \le N$ في العينة المستقبلية ذات الحجم N بالتعويض في المعادلة (6.3) بالقيم $M_i = -1, i = 1,2,...,r$ و $\Upsilon_r = K = 1$.

$$\Pr[Y_s \ge \mu \,|\, \underline{x}] = \frac{\alpha \hat{\theta}_{ML}^{s}}{(s-1)!} \int_{\mu}^{\infty} y_s^{\alpha-1} e^{-y_s^{\alpha}} u^{\hat{\theta}_{ML}-1}(y_s) [-\ln u(y_s)]^{s-1} dy_s, \qquad (6.43)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ نحصل على

$$\Pr[Y_1 \ge \mu \,|\, \underline{x}] = \alpha \hat{\theta}_{ML} \int_{\mu}^{\infty} y_1^{\alpha-1} e^{-y_1^{\alpha}} u^{\hat{\theta}_{ML}-1}(y_1) dy_1, \qquad (6.44)$$
$$= 1 - [1 - e^{-\mu^{\alpha}}]^{\hat{\theta}_{ML}},$$

نلاحظ من (6.44) أن $\Pr[Y_1 \ge 0 \,|\, \underline{x}] = 1$، ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر (الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$) للقيمة المستقبلية y_1 بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من العلاقة:

$$L(\underline{x}) = \left[-\ln\left\{ 1 - \left[\tfrac{1-\tau}{2}\right]^{1/\hat{\theta}_{ML}} \right\} \right]^{1/\alpha}, \quad U(\underline{x}) = \left[-\ln\left\{ 1 - \left[\tfrac{1+\tau}{2}\right]^{1/\hat{\theta}_{ML}} \right\} \right]^{1/\alpha}. \qquad (6.45)$$

ثانيا: تنبؤ النقطة:

بالتعويض في العلاقة (6.4) فإنه يمكن الحصول على تنبؤ نقطة الإمكان الأكبر كما يلي:

$$\hat{y}_{s_{(ML)}} = E_{g_1^*}(Y_s) = \frac{\alpha \hat{\theta}_{ML}^{s}}{(s-1)!} \int_{\mu}^{\infty} y_s^{\alpha} e^{-y_s^{\alpha}} u^{\hat{\theta}_{ML}-1}(y_s) \left[-\ln u(y_s)\right]^{s-1} dy_s, \qquad (6.46)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ فإن

$$\begin{aligned} \hat{y}_{1_{(ML)}} &= \alpha \hat{\theta}_{ML}^{s} \int_{0}^{\infty} y_1^{\alpha} e^{-y_1^{\alpha}} u^{\hat{\theta}_{ML}-1}(y_1)\, dy_1, \\ &= \hat{\theta}_{ML}^{s} \int_{0}^{1} [-\ln(1-z)]^{1/\alpha} z^{\hat{\theta}_{ML}-1} dz. \end{aligned} \qquad (6.47)$$

حيث $\hat{\theta}_{ML}$ ينتج من العلاقة (3.112).

عندما تكون المعلمتان α, θ مجهولتين:

أولا: تنبؤ الفترة:

نحصل على حدي تنبؤ الإمكان الأكبر للقيمة المسجلة الـدنيا $Y_s,\ 1 \le s \le N$ فـي العينـة المستقبلية ذات الحجم N بالتعويض فـي المعادلـة (6.23) بـالقيم $M_i = -1, i = 1, 2, ..., r$ و $\Upsilon_r = K = 1$.

$$\Pr[Y_s \ge \mu \mid \underline{x}] = \frac{\hat{\alpha}_{ML} \hat{\theta}_{ML}}{(s-1)!} \int_{\mu}^{\infty} y_s^{\hat{\alpha}_{ML}-1} e^{-y_s^{\hat{\alpha}_{ML}}} u^{\hat{\theta}_{ML}-1}(y_s) \left[-\ln u(y_s)\right]^{s-1} dy_s, \qquad (6.48)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ فإن

$$\begin{aligned} \Pr[Y_1 \ge \mu \mid \underline{x}] &= \hat{\alpha}_{ML} \hat{\theta}_{ML} \int_{\mu}^{\infty} y_1^{\hat{\alpha}_{ML}-1} e^{-y_1^{\hat{\alpha}_{ML}}} u^{\hat{\theta}_{ML}-1}(y_1)\, dy_1, \\ &= 1 - [1 - e^{-\mu^{\hat{\alpha}_{ML}}}]^{\hat{\theta}_{ML}}, \end{aligned} \qquad (6.49)$$

ويعطى حدا تنبؤ الإمكان الأكبر(الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلـى $U(\underline{x})$) للقيمـة المـستقبلية y_1 بمستوى ثقة $100\tau\%$ لقيم τ المختلفة من العلاقة:

$$\left.\begin{aligned} L(\underline{x}) &= \left[-\ln\left\{1-\left[\tfrac{1-\tau}{2}\right]^{1/\hat{\theta}_{ML}}\right\}\right]^{1/\hat{\alpha}_{ML}} , \\ U(\underline{x}) &= \left[-\ln\left\{1-\left[\tfrac{1+\tau}{2}\right]^{1/\hat{\theta}_{ML}}\right\}\right]^{1/\hat{\alpha}_{ML}} . \end{aligned}\right\} \qquad (6.50)$$

ثانيا: تنبؤ النقطة:

بالتعويض في العلاقة (6.24) فإنه يمكن الحصول على تنبؤ نقطة الإمكان الأكبر كما يلي:

$$\hat{y}_{s_{(ML)}} = E_{g_1^*}(Y_s) = \frac{\hat{\alpha}_{ML}\,\hat{\theta}_{ML}^{s}}{(s-1)!}\int_0^{\infty} y_s^{\hat{\alpha}_{ML}} e^{-y_s^{\hat{\alpha}_{ML}}} u^{\hat{\theta}_{ML}-1}(y_s)\left[-\ln u(y_s)\right]^{s-1} dy_s . \qquad (6.51)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ فإن

$$\left.\begin{aligned} \hat{y}_{1_{(ML)}} &= \hat{\alpha}_{ML}\,\hat{\theta}_{ML}^{s}\int_0^{\infty} y_1^{\hat{\alpha}_{ML}} e^{-y_1^{\hat{\alpha}_{ML}}} u^{\hat{\theta}_{ML}-1}(y_1)dy_1 \\ &= \hat{\theta}_{ML}^{s}\int_0^{1} [-\ln(1-z)]^{1/\hat{\alpha}_{ML}} z^{\hat{\theta}_{ML}-1}dz . \end{aligned}\right. \qquad (6.52)$$

حيث $\hat{\alpha}_{ML},\hat{\theta}_{ML}$ ينتجان من العلاقتين (3.112) و(3.113) على التوالي.

(٦-٥-٢) تنبؤ بييز للقيم المسجلة الدنيا في العينة المستقبلية

نحسب الآن حدود تنبؤ بييز للقيم المسجلة الدنيا في العينة المستقبلية ذات الحجم N كما يلي:

يمكن الحصول على تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا $Y_s,\ 1\le s\le N$ في العينة المستقبلية ذات الحجم N وذلك كحالات خاصة مما سبق بالتعويض عن قيمة $\eta(\underline{x};\alpha,\theta)$ من العلاقة (3.73) وبوضع $M_i=-1,\ i=1,2,...,r$ و $\Upsilon_r=K=1$.

التنبؤ عندما تكون α معلومة:

توزيع قبلي معام للمعلمة θ

تنبؤ الفترة:

نحصل على حدي تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا $Y_s, 1\le s\le N$ من المعادلة (6.8) كما يلي:

$$\begin{aligned} \Pr[Y_s \ge \mu\,|\,\underline{x}] = \frac{K_1^{-1}\alpha}{(s-1)!}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum\nolimits_r \int_{\mu}^{\infty}\int_0^{\infty}\theta^{r+v}\, e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)+\delta-\ln u(y_s)]} \\ v(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1} d\theta\, dy_s , \end{aligned} \qquad (6.53)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ فإن:

$$\Pr[Y_1 \geq \mu \,|\, \underline{x}] = K_1^{-1}\alpha\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum_r$$
$$\int_{\mu}^{\infty}\int_0^{\infty} \theta^{r+\nu}\; e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)+\delta-\ln u(y_1)]}\; v(y_1)\,d\theta dy_1,$$
$$= K_1^{-1}\alpha\,\Gamma(r+\nu+1)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum_r \tag{6.54}$$
$$\int_{\mu}^{\infty}\;[\xi(\underline{x};\alpha,r)+\delta-\ln u(y_1)]^{-(r+\nu+1)} v(y_1)dy_1,$$
$$= K_1^{-1}\Gamma(r+\nu)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum_r$$
$$\left\{[\xi(\underline{x};\alpha,r)+\delta]^{-(r+\nu)} - [\xi(\underline{x};\alpha,r)+\delta-\ln u(\mu)]^{-(r+\nu)}\right\},$$

ويعطى حدا تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للإحصاء المرتب المعمم Y_s بمـستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (6.54) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة خـسارة مربـع الخطـأ المتوازنة من العلاقة (6.9) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبـر للمـشاهدة المـستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (6.46)، $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالـة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من العلاقة (6.10) كما يلي:

$$E_{pd}(Y_s \,|\, \underline{x}) = \frac{K_1^{-1}\alpha}{(s-1)!}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum_r\;\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\theta^{r+\nu}\; e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)+\delta-\ln u(y_s)]} \tag{6.55}$$
$$y_s v(y_s)\big[-\ln\zeta(y_s)\big]^{s-1}\,d\theta dy_s,$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ نحصل على $\hat{y}_{1_{(ML)}}$ من العلاقة (6.47) ويكون

$$E_{pd}(Y_1 \,|\, \underline{x}) = K_1^{-1}\alpha\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum_r$$
$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\;\theta^{r+\nu}\; e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)+\delta-\ln u(y_1)]}\; y_1 v(y_1)d\theta dy_1,$$
$$= K_1^{-1}\alpha\,\Gamma(r+\nu+1)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum_r \tag{6.56}$$
$$\int_0^{\infty}[\xi(\underline{x};\alpha,r)+\delta-\ln u(y_1)]^{-(r+\nu+1)} y_1 v(y_1)\,dy_1.$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا يمكن الحصول على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالـة الخـسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (6.11)، حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمـشاهدة المستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه من العلاقة (6.46)، $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتعطى من العلاقة (6.12) كما يلي:

$$E_{pd}(e^{-aY_s}|\underline{x})=\frac{K_1^{-1}\alpha}{(s-1)!}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r\int_0^\infty\int_0^\infty\theta^{r+v} e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)+\delta-\ln u(y_s)]}e^{-ay_s}v(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\theta\, dy_s, \tag{6.57}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ نحصل على $\hat{y}_{1_{(ML)}}$ من العلاقة (6.47) ويكون

$$\begin{aligned}E_{pd}(e^{-aY_1}|\underline{x})&=K_1^{-1}\alpha\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r\\&\quad\int_0^\infty\int_0^\infty\theta^{r+v}\, e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)+\delta-\ln u(y_1)]}\, e^{-ay_1}v(y_1)\,d\theta\, dy_1,\\&=K_1^{-1}\alpha\Gamma(r+v+1)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r\\&\quad\int_0^\infty[\xi(\underline{x};\alpha,r)+\delta-\ln u(y_1)]^{-(r+v+1)}\, e^{-ay_1}v(y_1)dy_1,\end{aligned} \tag{6.58}$$

حيث K_1 سبق تعريفه بالعلاقة (3.81).

(٦-٣-٢-٢) توزيع قبلي غير معلم للمعلمة θ

في هذه الحالة يمكن الحصول على تنبؤات الفترة والنقطة كحالات خاصة وذلك بوضـع $v=0,\delta=0$ في علاقات التنبؤ باستخدام توزيع قبلي معلم للمعلمة θ (علاقات البند السابق) كما يلي:

تنبؤ الفترة:

نحصل على حدي تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا $Y_s, 1\le s\le N$ من العلاقة (6.53) كما يلي:

$$\Pr[Y_s\ge\mu|\underline{x}]=\frac{J_1^{-1}\alpha}{(s-1)!}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum_r\int_\mu^\infty\int_0^\infty\theta^{r}\, e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_s)]}v(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\theta\, dy_s, \tag{6.59}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ فإن:

$$\Pr[Y_1 \geq \mu \,|\, \underline{x}] = K_1^{-1}\alpha\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)$$
$$\int_{\mu}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\theta^r\ e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_1)]}\,v(y_1)\,d\theta\,dy_1,$$
$$= J_1^{-1}\alpha\,\Gamma(r+1)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum\nolimits_r \tag{6.60}$$
$$\int_{\mu}^{\infty}\ [\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_1)]^{-(r+1)}v(y_1)\,dy_1,$$
$$= J_1^{-1}\Gamma(r)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum\nolimits_r$$
$$\left\{[\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-r} - [\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(\mu)]^{-r}\right\},$$

ويعطى حدا تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للإحصاء المرتب المعمم Y_s بمـستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (6.60) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة خـسارة مربـع الخطـأ المتوازنة من العلاقة (6.9) حيث $\hat{y}_{s(ML)}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبـر للمـشاهدة المـستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (6.46)، $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالـة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من العلاقة (6.56) كما يلي:

$$E_{pd}(Y_s \,|\, \underline{x}) = \frac{K_1^{-1}\alpha}{(s-1)!}\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum\nolimits_r\ \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\theta^r\ e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_s)]} \tag{6.61}$$
$$y_s v(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\theta\,dy_s,$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ نحصل على $\hat{y}_{1(ML)}$ من العلاقة (6.47) ويكون

$$E_{pd}(Y_1 \,|\, \underline{x}) = J_1^{-1}\alpha\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)$$
$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\theta^r\ e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_1)]}\ y_1 v(y_1)\,d\theta\,dy_1, \tag{6.62}$$
$$= J_1^{-1}\alpha\,\Gamma(r+1)\left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right)\sum\nolimits_r$$
$$\int_{0}^{\infty}[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_1)]^{-(r+1)}\,y_1 v(y_1)\,dy_1.$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا يمكن الحصول على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالـة الخـسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (6.11) حيث $\hat{y}_{s(ML)}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبـر للمـشاهدة المستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه من العلاقة (6.46)، $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتعطى من العلاقة (6.57) كما يلي:

$$E_{pd}(e^{-aY_s}|\underline{x})=\frac{K_1^{-1}\alpha}{(s-1)!}\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum\nolimits_r \int_0^\infty\int_0^\infty \theta^r\, e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_s)]}e^{-ay_s}v(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\theta dy_s, \tag{6.63}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ نحصل على $\hat{y}_{1(ML)}$ من العلاقة (6.47) ويكون

$$\begin{aligned}E_{pd}(e^{-aY_1}|\underline{x})&=J_1^{-1}\alpha\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum\nolimits_r \int_0^\infty\int_0^\infty \theta^r\, e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_1)]}\, e^{-ay_1}v(y_1)\,d\theta dy_1,\\ &=J_1^{-1}\alpha\,\Gamma(r+1)\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\sum\nolimits_r \int_0^\infty[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_1)]^{-(r+1)}\, e^{-ay_1}v(y_1)\,dy_1,\end{aligned} \tag{6.64}$$

حيث J_1 سبق تعريفه بالعلاقة (3.88).

التنبؤ في حالة عدم معلومية المعلمتين α,θ :

توزيعات قبلية معلمة للمعلمتين α,θ

تنبؤ الفترة:

نحصل على حدي تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا $Y_s, 1\le s\le N$ من العلاقة (6.28) كما يلي:

$$\begin{aligned}\Pr[Y_s\ge\mu|\underline{x}]&=\int_\mu^\infty H_4^*(y_s|\underline{x})dy_s,\\ &=\frac{K_2^{-1}}{(s-1)!}\sum\nolimits_r \int_0^\infty\int_\mu^\infty\int_0^\infty\left(\prod_{i=1}^{r}v(x_i)\right)\alpha^{r+d-\nu}e^{-\alpha/b}\theta^{r+\nu}\\ &\quad e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)+1/\alpha-\ln u(y_s)]}v(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\theta\, dy_s d\alpha,\end{aligned} \tag{6.65}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ نحصل على

$$\Pr[Y_1 \geq \mu \,|\, \underline{x}] = K_2^{-1} \sum_r \int_0^\infty \int_\mu^\infty \int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) \alpha^{r+d-v} e^{-\alpha/b} \theta^{r+v}$$
$$e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)+1/\alpha-\ln u(y_1)]} v(y_1)\, d\theta\, dy_1\, d\alpha,$$
$$= K_2^{-1} \Gamma(r+v+1) \sum_r \int_\mu^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) \tag{6.66}$$
$$\int_0^\infty \alpha^{r+d-v} e^{-\alpha/b} [\xi(\underline{x};\alpha,r)+1/\alpha-\ln u(y_1)]^{-(r+v+1)} v(y_1)\, dy_1\, d\alpha,$$
$$= K_2^{-1} \Gamma(r+v) \sum_r \int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) \alpha^{r+d-v-1} e^{-\alpha/b}$$
$$\left\{ [\xi(\underline{x};\alpha,r)+1/\alpha]^{-(r+v)} - [\xi(\underline{x};\alpha,r)+1/\alpha-\ln u(\mu)]^{-(r+v)} \right\} d\alpha,$$

ويعطى حدا تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية Y_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (6.66) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (6.9) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (6.51)، و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من العلاقة (6.29) كما يلي:

$$E_{pd}(Y_s \,|\, \underline{x}) = \frac{K_2^{-1}}{(s-1)!} \sum_r \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) \alpha^{r+d-v} e^{-\alpha/b} \theta^{r+v}$$
$$e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)+1/\alpha-\ln u(y_s)]} y_s v(y_s) \tag{6.67}$$
$$\left[-\ln \zeta(y_s)\right]^{s-1} d\theta\, dy_s\, d\alpha,$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ نحصل على $\hat{y}_{1_{(ML)}}$ من العلاقة (6.52) ويكون

$$E_{pd}(Y_1 \,|\, \underline{x}) = K_2^{-1} \sum_r \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) \alpha^{r+d-v} e^{-\alpha/b} \theta^{r+v}$$
$$e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)+1/\alpha-\ln u(y_1)]}\; y_1 v(y_1)\, d\theta\, dy_1 d\alpha, \tag{6.68}$$
$$= K_2^{-1} \Gamma(r+v+1) \sum_r \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) \alpha^{r+d-v} e^{-\alpha/b}$$
$$[\xi(\underline{x};\alpha,r)+1/\alpha-\ln u(y_1)]^{-(r+v+1)}\; y_1 v(y_1)\, dy_1 d\alpha,$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا يمكن الحصول على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالـة الخـسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (6.11) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمـشاهدة المستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه فـي العلاقـة (6.51)، و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هـو القيمـة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتعطى من العلاقة (6.30) كما يلي:

$$E_{pd}(e^{-aY_s}|\underline{x}) = \frac{K_2^{-1}}{(s-1)!}\sum_r \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) \alpha^{r+d-v} e^{-\alpha/b}\theta^{r+v}$$
$$e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)+1/\alpha-\ln u(y_s)]} e^{-ay_s} v(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1} d\theta\, dy_s d\alpha, \quad (6.69)$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ نحصل على $\hat{y}_{1_{(ML)}}$ من العلاقة (6.52) ويكون

$$E_{pd}(e^{-aY_1}|\underline{x}) = K_2^{-1}\sum_r \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) \alpha^{r+d-v} e^{-\alpha/b}\theta^{r+v}$$
$$e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)+1/\alpha-\ln u(y_1)]}\; e^{-ay_1} v(y_1)\, d\theta\, dy_1\, d\alpha,$$
$$= K_2^{-1}\Gamma(r+v+1)\sum_r \int_0^\infty\int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) \alpha^{r+d-v} e^{-\alpha/b} \quad (6.70)$$
$$[\xi(\underline{x};\alpha,r)+1/\alpha-\ln u(y_1)]^{-(r+v+1)}\; e^{-ay_1} v(y_1)\, dy_1\, d\alpha,$$

حيث K_2 سبق تعريفه بالعلاقة (3.97).

توزيعات قبلية غير معلمة للمعلمتين α, θ

تنبؤ الفترة:

نحصل على حدي تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا $Y_s, 1\le s\le N$ من العلاقة (6.36) كما يلي:

$$\Pr[Y_s \ge \mu|\underline{x}] = \frac{J_2^{-1}}{(s-1)!}\sum_r \int_0^c\int_\mu^\infty\int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) \alpha^{r+1}\theta^{r} \quad (6.71)$$
$$e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_s)]} v(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}\, d\theta dy_s\, d\alpha,$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ نحصل على

$$\Pr[Y_1 \ge \mu|\underline{x}] = J_2^{-1}\sum_r \int_0^c\int_\mu^\infty\int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i)\right) \alpha^{r+1}\theta^{r}$$
$$e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_1)]} v(y_1)\, d\theta dy_1 d\alpha,$$

$$= J_2^{-1}\,\Gamma(r+1)\sum_r \int_0^c \int_\mu^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) \alpha^{r+1}$$
$$[\xi(\underline{x};\alpha,r) - \ln u(y_1)]^{-(r+1)}\, v(y_1)\, dy_1 d\alpha, \qquad (6.72)$$
$$= J_2^{-1}\,\Gamma(r)\sum_r \int_0^c \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) \alpha^{r}$$
$$\left\{ [\xi(\underline{x};\alpha,r)]^{-r} - [\xi(\underline{x};\alpha,r) - \ln u(\mu)]^{-r} \right\} d\alpha,$$

ويعطى حدا تنبؤ بييز الأدنى $L(\underline{x})$ والأعلى $U(\underline{x})$ للقيمة المستقبلية Y_s بمستوى ثقة $100\tau\%$ من العلاقة (6.72) باستخدام العلاقة (2.52).

تنبؤات النقطة:

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة

نحصل على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة خسارة مربع الخطأ المتوازنة من العلاقة (6.9) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة المستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (6.51) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتحسب من العلاقة (6.37) كما يلي:

$$E_{pd}(Y_s \mid \underline{x}) = \frac{J_2^{-1}}{(s-1)!}\sum_r \int_0^c \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) \alpha^{r+1}\theta^r \qquad (6.73)$$
$$e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_s)]}\, y_s v(y_s) \left[-\ln \zeta(y_s)\right]^{s-1} d\theta\, dy_s\, d\alpha,$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ نحصل على $\hat{y}_{1_{(ML)}}$ من العلاقة (6.52) ويكون

$$E_{pd}(Y_1 \mid \underline{x}) = J_2^{-1}\sum_r \int_0^c \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) \alpha^{r+1}\theta^r$$
$$e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_1)]}\, y_1 v(y_1)\, d\theta\, dy_1\, d\alpha, \qquad (6.74)$$
$$= J_2^{-1}\,\Gamma(r+1)\sum_r \int_0^c \int_\mu^\infty \left(\prod_{i=1}^{r} v(x_i) \right) \alpha^{r+1}$$
$$[\xi(\underline{x};\alpha,r) - \ln u(y_1)]^{-(r+1)}\, y_1 v(y_1)\, dy_1\, d\alpha,$$

تنبؤ النقطة اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة

أيضا يمكن الحصول على تنبؤ النقطة للمشاهدة المستقبلية Y_s اعتمادا على دالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة من العلاقة (6.11) حيث $\hat{y}_{s_{(ML)}}$ هو تنبؤ الإمكان الأكبر للمشاهدة

المستقبلية Y_s والذي سبق الحصول عليه في العلاقة (6.51) و $E_{pd}(.|\underline{x})$ هو القيمة المتوقعة منسوبة لدالة كثافة الاحتمال التنبؤية لبييز وتعطى من العلاقة (6.38) كما يلي:

$$E_{pd}(e^{-aY_s}|\underline{x}) = \frac{J_2^{-1}}{(s-1)!}\sum_r \int_0^c\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)\alpha^{r+1}\theta^r \\ e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_s)]}e^{-ay_s}v(y_s)\left[-\ln\zeta(y_s)\right]^{s-1}d\theta\, dy_s\, d\alpha, \tag{6.75}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $s=1$ نحصل على $\hat{y}_{1_{(ML)}}$ من العلاقة (6.52) ويكون

$$\begin{aligned} E_{pd}(e^{-aY_1}|\underline{x}) &= J_2^{-1}\sum_r \int_0^c\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)\alpha^{r+1}\theta^r \\ &\quad e^{-\theta[\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_1)]}\; e^{-ay_1}v(y_1)\,d\theta dy_1 d\alpha, \\ &= J_2^{-1}\Gamma(r+1)\sum_r \int_0^c\int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^r v(x_i)\right)\alpha^{r+1} \\ &\quad [\xi(\underline{x};\alpha,r)-\ln u(y_1)]^{-(r+1)}\, e^{-ay_1}v(y_1)\,dy_1 d\alpha, \end{aligned} \tag{6.76}$$

حيث J_2 سبق تعريفه بالعلاقة (3.106).

واضح من العلاقات السابقة أن حساب تنبؤات بييز في حالة عدم معلومية المعلمتين يستلزم إجراء عمليات حسابية معقدة لذلك سيتم استخدام إحدى طرق سلسلة ماركوف (MCMC) لإنجازها.

(٦-٦) مثال تطبيقي Application Example

باستخدام بيانات المثال التطبيقي الذي سبق استخدامه في الفصل الثالث في البند (٣-٦) تم حساب تنبؤات بييز (فترة ونقطة) باستخدام أسلوب العينتين حيث تم اعتبار العينة المتاحة عينة مراقبة تتابعيا من النوع الثاني والعينة المستقبلية هي عينة من قيم مسجلة دنيا وذلك بتطبيق نتائج البند (٦-٥-٢) كما يلي:

باستخدام أنظمة المراقبة التي سبق استخدامها في الفصل الثالث في البند (٣-٦) تم حساب حدود تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز للقيمة المسجلة الدنيا الأولى باستخدام توزيعات قبلية معلمة وأخرى غير معلمة لمعلمتي التوزيع وتم تسجيل النتائج في الجدول (٦-١).

جدول (٦-١): تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (فترة ونقطة) للقيمة المسجلة الدنيا الأولى y_1 لبيانات المثال التطبيقي باستخدام توزيعات قبلية معلمة وأخرى غير معلمة لمعلمتي التوزيع حيث $d = 2, b = 0.5, \nu = 0.5, \omega = 0.5, c = 2$.

CS			interval predictions				point predictions			
			90%		95%		ML	Bayes (MCMC)		
								BSEL	BLINEX	
									a	
			L	U	L	U			-2	2
i	ML		1.17561	8.5601	0.9509	10.1994	3.8797			
	Bayes (MCMC)	Inf.	2.1532	9.1663	1.9382	10.5311		3.5215	3.9801	3.8220
		Non-Inf.	2.7561	9.7239	2.6443	10.5502		3.9156	4.1537	3.6125
ii	ML		1.2362	5.1060	1.0660	5.8027	2.7882			
	Bayes (MCMC)	Inf.	2.2212	5.2147	2.1401	5.5612		2.6132	2.8203	2.6832
		Non-Inf.	2.5319	6.0012	2.3078	6.1304		2.7214	2.8115	2.6915
iii	ML		1.1414	4.8253	0.9790	5.4823	2.6225			
	Bayes (MCMC)	Inf.	2.1563	5.1307	2.2523	5.3299		2.5771	2.6711	2.4956
		Non-Inf.	2.4937	5.2197	2.5309	5.6193		2.6912	2.7177	2.5800

(٦-٧) دراسة المحاكاة Simulation Study

للوقوف على مدى دقة وكفاءة نتائج التنبؤات التي تم الحصول عليها في هذا الفصل، تم انجاز دراسة المحاكاة كما يلي:

باستخدام أنظمة المراقبة التي تم اقتراحها في الفصل الثالث في البند (٣-٧) تم حساب تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (فترة ونقطة) باستخدام نتائج البند (٦-٥-٢) طبقا للخطوات التالية:

١- تم توليد عينات مراقبة تتابعيا من توزيع وايبل الأسي بالمعلمة θ في حالة معلومية المعلمة α وبالمعلمتين (α, θ) في حالة عدم معلومية المعلمتين بأحجام مختلفة $n = 25, 30, 50, 70$ و باستخدام أنظمة المراقبة التي سبق استخدامها في الفصل الثالث في الجدول (٣-٩) باتباع طريقة التوليد التي تم عرضها في الفصل الثاني مع العلاقة (2.63) (بنفس الأسلوب المتبع في الفصل الثالث).

٢- تم حساب تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (بفترة أوبنقطة) للقيمة المسجلة الأولى في العينة المستقبلية وذلك باستخدام دوال خسارة متماثلة BSEL وغير متماثلة BLINEX

عند أكثر من قيمة لمعلمة الشكل a، اعتمادا على التوزيعات القبلية المعلمة وغير المعلمة والتي تم افتراضها في هذا الفصل.

٣- بالنسبة لتنبؤات الفترة تم توليد 1000 قيمة مسجلة من توزيع وايبل الأسي بقيم المعـالم التي سبق التوليد بها في الخطوات السابقة، وتم حساب النسبة المئوية لمستويات التنبـؤ للقيمة المسجلة الأولى المستقبلية، وتم عرض النتائج العددية فـي الجـداول (٦-٢) - (٦-٥).

جدول(٦-٢): تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (فترة ونقطة) للقيمة المسجلة الـدنيا الأولـى y_1 **عندما** $\alpha = 2$ **حيث** $\delta = 2, \nu = 0.5, \theta = 2.4297, \omega = 0.5$ **.**

CS		*interval predictions*						*point predictions*			
		90%			*95%*			*ML*	*Bayes(MCMC)*		
									BSEL	*BLINEX*	
										a	
		L	*U*	*%*	*L*	*U*	*%*			*-2*	*2*
i	*ML*	0.5290	1.9328	90.1	0.4402	2.1061	95.3	1.1677			
	Bayes	0.8394	2.1150	89.7	0.7503	2.2752	94.5		1.2955	1.4277	1.2242
ii	*ML*	0.5970	1.9727	90.5	0.5072	2.1430	94.7	1.2243			
	Bayes	1.0598	2.2389	91.2	0.9775	2.3911	95.3		1.4101	1.5502	1.3359
iii	*ML*	0.5766	1.9608	90.8	0.4870	2.1320	95.7	1.2075			
	Bayes	0.9657	2.1840	91.4	0.8809	2.3396	95.9		1.3641	1.4980	1.2933
iv	*ML*	0.6411	1.9982	91.1	0.5513	2.1666	96.2	1.2605			
	Bayes	1.0420	2.2576	92.5	0.9596	2.3805	96.8		1.4208	1.5503	1.3518

جدول (٦-٣): تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (فترة ونقطة) للقيمة المسجلة الدنيا الأولى y_1 عندما $\alpha = 2$ حيث $\theta = 1.5, \omega = 0.5, c = 2$.

CS		interval predictions						point predictions			
		90%			95%			ML	Bayes(MCMC)		
									BSEL	BLINEX	
										a	
		L	U	%	L	U	%			-2	2
i	ML	0.3864	1.8448	89.2	0.3032	2.0251	92.5	1.0435			
	Bayes	0.7473	2.0627	89.5	0.6566	2.2265	92.7		1.3497	1.5354	1.2063
ii	ML	0.3622	1.8290	91.3	0.2806	2.0105	94.3	1.0213			
	Bayes	0.8482	2.1183	92.4	0.7599	2.2783	95.6		1.4287	1.6021	1.2945
iii	ML	0.4897	1.9082	91.7	0.4001	2.0834	95.3	1.1329			
	Bayes	0.8887	2.1403	92.1	0.8019	2.2987	95.7		1.4600	1.6285	1.3296
iv	ML	0.4173	1.8646	92.0	0.3323	2.0432	95.5	1.0712			
	Bayes	0.8486	2.1173	92.9	0.7609	2.2773	96.0		1.4280	1.6012	1.2942

جدول (٦-٤): تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (فترة ونقطة) للقيمة المسجلة الـدنيا الأولـى y_1 حيث $d = 0.5, b = 2, v = 4, \alpha = 1.2240, \theta = 4.1074, \omega = 0.5$.

CS		interval predictions						point predictions			
		90%			95%			ML	Bayes(MCMC)		
									BSEL	BLINEX	
										a	
		L	U	%	L	U	%			-2	2
i	ML	0.8197	3.7661	89.6	0.6867	4.2649	94.9	2.0219			
	Bayes (MCMC)	0.7234	4.4917	89.1	0.8304	4.5882	94.5		2.1429	2.9176	1.7782
ii	ML	0.7772	3.8815	90.2	0.6434	4.4190	95.3	2.0308			
	Bayes (MCMC)	0.6896	3.4818	90.5	0.5321	3.6336	94.4		2.0632	2.4981	1.6524
iii	ML	0.6455	3.0947	90.7	0.5309	3.2862	95.1	1.6625			
	Bayes (MCMC)	1.4085	3.1744	91.1	1.3173	3.4888	96.2		1.9521	2.2637	1.8017
iv	ML	0.6036	3.5517	91.4	0.4836	4.0620	96.2	1.7869			
	Bayes (MCMC)	0.5134	3.7210	92.5	0.4206	4.5051	96.6		1.8331	2.4101	1.7950

جدول (٦-٥): تنبؤات الإمكان الأكبر وتنبؤات بييز (فترة ونقطة) للقيمة المسجلة الدنيا الأولى y_1 حيث $\alpha = 1.5, \theta = 2.5, \omega = 0.5, c = 2$.

CS		interval predictions						point predictions			
		90%			95%			ML	Bayes(MCMC)		
									BSEL	BLINEX	
										a	
		L	U	%	L	U	%			-2	2
i	ML	0.5100	1.8408	89.7	0.5138	1.9868	94.5	1.1759			
	Bayes (MCMC)	0.9543	3.2825	90.1	0.8331	3.4083	95.3		1.7362	2.3587	1.3935
ii	ML	0.5011	3.0166	90.7	0.3951	3.4295	95.7	1.5277			
	Bayes (MCMC)	0.7738	3.5422	91.5	0.6081	3.7272	96.5		1.8371	2.4707	1.5310
iii	ML	0.4766	2.5174	91.3	0.3791	2.8219	96.1	1.3401			
	Bayes (MCMC)	1.1414	3.5939	91.9	1.0242	3.6780	96.4		1.9198	2.6478	1.5478
iv	ML	0.4526	2.5443	92.5	0.3562	2.8609	95.5	1.3314			
	Bayes (MCMC)	0.5509	2.9988	92.8	0.4527	3.1264	96.7		1.4329	1.8628	1.2442

(٦-٨) التعليق على النتائج Comments on the Results

في هذا الفصل تم استخدام أسلوب التنبؤ بعينتين مستقلتين إحداهما (العينة السابقة) عينة مراقبة تتابعيا من النوع الثاني والأخرى (المستقبلية) عينة من القيم المسجلة الدنيا، وتم إيجاد تنبؤ الإمكان الأكبر وتنبؤ بييز (فترة ونقطة) للقيمة المسجلة الدنيا الأولى في العينة المستقبلية وذلك باستخدام عينات سابقة مراقبة تتابعيا من النوع الثاني من توزيع وايبل الأسي ذي المعلمتين وباعتبار توزيعات قبلية معلمة وأخرى غير معلمة لمعلمتي التوزيع. أيضا تم استخدام البيانات الخاصة بالمثال التطبيقي الوارد في الفصل الثالث لتوضيح الخطوات المتبعة للتنبؤ في حالة توفر عينة من البيانات الحقيقية من واقع تجربة فعلية وتم عرض النتائج في الجدول (٦-١)، ورغبة منا في اختبار دقة النتائج التي تم التوصل إليها تم انجاز دراسة المحاكاة، ومن خلال النتائج العددية لهذه الدراسة تم رصد الملاحظات الآتية:

١- من الجداول (٦-٢) – (٦-٥) يتضح لنا أن فترات تنبؤ الإمكان الأكبر وفترات تنبؤ بييز للقيمة المسجلة الدنيا الأولى من العينة المستقبلية متقاربة وأعطت نسبا جيدة وذلك بمقارنة النسب المئوية الناتجة بالنـسبة المئويـة الفعليـة (95%) أو (90%)، وهذا يعطينا السند لأن نوصي باستخدام تنبؤ الإمكان الأكبـر والتنبـؤ البييزي في حساب فترات التنبؤ.

٢- تم حل مشكلة الحسابات المعقدة التي تنتج في استدلالات بييـز اعتمـادا علـى التوزيعات القبلية المعلمة وغير المعلمة (في حالة عدم معلومية معلمتي التوزيع) باستخدام إحدى طرق سلسلة ماركوف وحصلنا على نتائج جيدة.

٣- نلاحظ بصفة عامة أن أطوال فترات التنبؤ تقل بزيادة أحجام العينات.

٤- كل النتائج العددية في هذا الباب تم انجازها باستخدام حزمة بـرامج ماثيماتيكـا الإصدار السابع (Mathematica 7.0).

نتائج هذا الفصل تعتبر جديدة في مجال استدلالات بييز، والجدير بالذكر أن هذه النتائج نقوم بإعدادها للنشر في إحدى المجلات الإحصائية المتخصصة.

الفصل السابع

بعض الاقتراحات لدراسات مستقبلية

Some Suggestions for Future Studies

تم في هذه الرسالة دراسة تقدير معالم ودوال الصلاحية ومعدل التعطل بالإضافة إلى نموذج الإجهاد والقوة لتوزيع وايبل الأسي ذي المعلمتين اعتمادا على الإحصاءات المرتبـة المعممة. كذلك تمت دراسة تنبؤ عن المشاهدات المستقبلية التي تتبع نفس التوزيع. استخدمت طرق بييز اعتمادا على نوعين مختلفين من دوال الخسارة مثل دالة خـسارة مربـع الخطـأ المتوازنة ودالة الخسارة الخطية الأسية المتوازنة في التقدير والتنبؤ. وقد تم استخدام طريقـة الإمكان الأكبر لنفس الأهداف من تقدير وتنبؤ. استخدمت طرق سلسلة ماركوف في إجـراء الحسابات العددية. وتم تخصيص النتائج التي تم الحصول عليها إلى العينات المراقبة تتابعيـا من النوع الثاني والقيم المسجلة الدنيا.

انطلاقا من هذا العمل نؤكد أن هناك الكثير من الأفكار التي يمكن بحثها في المستقبل ومنها:

- استخدام طرق بييز العددية empirical Bayes methods في دراسة التقدير والتنبـؤ لنموذج وايبل الأسي ومقارنة النتائج بالنتائج التي تم الحصول عليها في أبواب هـذه الرسالة.
- دراسة التقدير والتنبؤ لنموذج وايبل الأسي في وجود بيانات شاذة outliers وأنـواع مختلفة من البيانات.
- إمكانية استخدام نموذج وايبل الأسي كأحـد نمـاذج اختبـارات الحيـاة المـسرعة accelerated life testing.
- إمكانية دراسة تحليل التمييز dscriminant analysis المرتبط بتوزيعات وايبل الأسي اعتمادا على الإحصاءات المرتبة المعممة.

- إضافة معلمة قياس scale parameter لتوزيع وايبل الأسي ليصبح ذي ثلاث معـالم حتى يتم تطوير استخدامه في تطبيقات إحصائية وبالتالي دراسة التقديرات والتنبؤات للنموذج.
- دراسة العلاقات التكرارية recurrence relations لعزوم بعض الإحصاءات المرتبطة بتوزيع وايبل الأسي وإمكانية استخدامها في تمييز characterization التوزيع.
- دراسة النموذج المختلط لتوزيعين من توزيعات وايبل الأسي وتقدير معالم النمـوذج بطرق مختلفة.
- دراسة اختبارات جودة التوفيق goodness of fit tests المرتبطـة بتوزيـع وايبـل الأسي.

المراجع

Abdel-Hamid, A. (2009). Constant-partially accelerated life tests for Burr type-XII distribution with progressive type-II censoring. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 53: 2511-2523.

Ahmad, K.E., Jaheen, Z.F. and Yousef, M.M. (2008). Inference on Pareto distribution as stress-strength model based on generalized order statistics. Journal of Applied Statistical Science, Vol. 17: 247-258.

Ahmadi, J. and Doostparast, M. (2006). Bayesian estimation and prediction for some life distributions based on record values. Statistical Papers, Vol. 47:373-392.

Ahmadi, J., Doostparast, M. and Parsian, A. (2005). Estimation and prediction in a two-parameters exponential distribution based on k-record values under LINEX loss function. Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol. 34: 795- 805.

Ahmadi, J., Jozani, M. J., Marchand, E., Parsian, A. (2009a). Bayes estimation based on k-record data from a general class of distributions under balanced type loss functions. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 139: 1180–1189.

Ahmadi, J., Jozani, M. J., Marchand, E., Parsian, A. (2009b). Prediction of k-records from a general class of distributions under balanced type loss functions. Metrika, Vol. 70, 1:19–33.

Ahmadi, J. and MirMostafaee, S. (2009). Prediction intervals for future records and order statistics coming from two parameter exponential distribution. Statistics and Probability Letters, Vol. 79: 977-983.

Ahsanullah, M. (1995). Introduction to Record Statistics. NOVA Science Publishers Inc., Huntington, New York.

Aitchison, J. and Dunsmore, I. (1975). Statistical Prediction Analysis, Cambridge University. Press.

Akdeniz, F. and Namba, A. (2003). A note on new feasible generalized Ridge regression estimator under the LINEX loss function. Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 73: 303-310.

Alamm, A.A., Raqab, M.Z. and Madi, M.T. (2007). Bayesian prediction intervals for future order statistics from the generalized exponential distribution**.** Journal of the Iranian Statistical Society, Vol. 6(1): 17-30.

AL-Hussaini, E. K. (2004). Generalized order statistics: prospective and applications. Journal Applied Statistics Science, Vol. 4: 1-12.

AL-Hussaini, E. K. and Ahmad, A. (2003a). On Bayesian interval prediction of future records. Test, Vol. 12: 79-99.

AL-Hussaini, E. K. and Ahmad, A. (2003b). On Bayesian predictive distributions of generalized order statistics. Metrika, Vol. 57: 165-176.

Ali Mousa, M. A. M. and AL-Sagheer, S. A. (2005). Bayesian prediction for progressively type-II censored data from the Rayleigh model. Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol. 34: 2353-2361.

Ali Mousa, M. A. M. and Jaheen, Z. F. (2003). Statistical inference for the Burr model based on progressively censored data. Computers and Mathematics with Applications, Vol. 43: 1441-1449.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998). Records. Wiley, New York.

Arslan, G. (2011). On a characterization of the uniform distribution by generalized order statistics. Journal of Computational and Applied Mathematics. **(to appear)**.

Asgharzadeh, A. (2009). Approximate MLE for the scaled generalized exponential distribution under progressive type-II censoring. Journal of the Korean Statistical Society. Vol. 38(3): 223-229.

Baklizi, A. (2008a). Estimation of Pr(X< Y) using record values in the one and two parameter exponential distributions. Communication in Statistics-Theory and Methods, Vol. 37: 692-698.

Baklizi, A. (2008b). Likelihood and Bayesian estimation of Pr(X< Y) using lower record values from the generalized exponential distributions. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 52: 3468-3473.

Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications. Birkhauser Puplishers, Boston.

Balakrishnan , N. and Cohen, A.C. (1991). Order Statistics and Inference: Estimation Methods**.** Academic Press, San Diego**.**

Balakrishnan, N. and Kannan, N. (2001). Point and interval estimation for parameters of the Logistic distribution based on progressively type-II censored samples. In Handbook of Statistics, (Balakrishnan, N. and Rao, C.R. eds.) Vol. 20: 431-456.

Balakrishnan, N., Kannan, N., Lin, C. and Wa, S. (2004). Inference for the extreme value distribution under progressive type-II censoring. Journal of Statistical Computational and Simulation, Vol. 74: 25-45.

Balakrishnan, N. and Rao, C. R. (1998). Order Statistics: Applications. In Handbook of Statistics, (Balakrishnan, N. and Rao, C.R. eds.) Vol. 16: 3-24.

Balakrishnan N. and Sandhu, R.A. (1995). A simple simulational algorithm for generating progressive type-II censored samples**.** American Statistician**,** Vol. 49: 229-230.

Basak, I., Basak, P. and Balakrishnan, N. (2006). On some predictors of times to failure of censored items in progressively censored samples. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 50:1313-1337.

Basu, A.P. and Ebrahimi, N. (1991). Bayesian approach to life testing and reliability estimation using asymmetric loss function. Journal of Statistical Planning and Inference**,** Vol. 29: 21-31.

Bayarri, M.J., Castellanos, M.E. and Morales, J. (2006). MCMC methods to approximate conditional predictive distributions. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 51: 621-640

Bordes, L. (2003). Non-parametric estimation under progressive censoring. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 58: 121-140.

Burkschat, M. (2009). Multivariate dependence of spacings of generalized order statistics. Journal of Multivariate Analysis, Vol. 100: 1093-1106.

Burkschat, M., Cramer, E. and Kamps, U. (2003). Dual generalized order statistics. METRON, Vol. LXI (1): 13-26.

Chan, P. S., Ng, H. K. T., Balakrishnan, N. and Zhou, Q. (2008). Point and interval estimation for extreme-value regression model under type-II censoring. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 52: 4040-4058.

Cohen, A.C. (1991). Truncated and Censored Samples : Theory and Applications**.** Marcel Dekker, New York.

Cohen, A.C. and Whitten, B. (1988). Parametric Estimation in Reliability and Life Span Models**,** Marcel Dekker, New York.

Cramer, E. (2003). Contributions to Generalized Order Statistic. Habilitaionss-chrift reprint, University of Oldenburg.

Cramer, E. and Hang, T.T. (2009). Generalized order statistics from arbitrary distributions and the Markov chain property. Journal of Statistical Planning and Inference. Vol. 139: 4064-4071

David, H. A. (1981). Order Statistics. Second Edition, John Wiley, New York**.**

David, H. A. and Nagaraja, H.N. (2003). Order Statistics. Third Edition, John Wiley, New York**.**

Fei Wu, SH. (2008). Interval estimation for a Pareto distribution based on a doubly type II censored sample. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 52: 3779-3788.

Fernandez, A. J. (2004). On estimating exponential parameters with general type-II progressive censoring. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 121: 135-147.

Geisser, S. (1993). Predictive Inference: An Introduction. Chapman and Hall, New York.

Geman, S. and Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distribution and the Bayesian restoration of images. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 6(6): 721-741.

Gupta, A., Mukherjee, B. and Upadhyay, S.K. (2008). Weibull extension model: A Bayes study using Markov chain Monte Carlo simulation. Reliability Engineering & System Safety. Vol. 93(10): 1434-1443.

Hossain, A. M. and Zimmer, W. J. (2003). Comparison of estimation methods for Weibull parameters: Complete and censored samples, Journal of Statistical Computational and Simulation, Vol. 73: 145-153.

Jaheen, Z.F. (2003). Bayesian prediction under a mixture of two component Gompertz lifetime model**.** Test, Vol. 12(1): 413-426.

Jaheen, Z.F. (2004). Empirical Bayes inference for generalized exponential distribution based on records. Communications in Statistics: Theory and Methods**,** Vol. 33(8): 1851–1861.

Jaheen, Z. F. (2005a). Estimation based on generalized order statistics from the Burr model**.** Communications in Statistics: Theory and Methods**,** Vol. 34: 785-794.

Jaheen, Z. F. (2005b). On record statistics from a mixture of two exponential distributions. Journal of Statistical Computations and Simulation**,** Vol. 75(1): 1-11.

Jaheen, Z.F. and AL- Harbi, M.M. (2011). Bayesian estimation for the exponentiated Weibull model via Markov chain Monte Carlo simulation. Communications in Statistics: Simulation and Computation, Vol. 40: 532–543**.**

Jaheen, Z.F. and AL- Harbi, M.M. (2011). Bayesian estimation based dual generalized order statistics from the exponentiated Weibull Model. Journal of Statistical Theory and Applications**, to appear**.

Jiang, R. and Murthy, D. N. P. (1999). The exponentiated Weibull family: a graphical approach. IEEE Transaction on Reliability, Vol. 48(1): 68-72.

Johnson, N., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). Continuous Univariate Distribution. Vol. 1, Second Edition. John Wiley, New York.

Jye-Wu, S. (2002). Estimation of the parameters of the Weibull distribution with progressively censored data. Journal of the Japan Statistical Society, Vol. 32: 155-163.

Kamps, U. (1995a). A Concept of Generalized Order Statistics. Teubner, Stuttgart, Germany.

Kamps, U. (1995b). A concept of generalized order statistics. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 48: 1-23.

Kamps, U. and Cramer, E. (2001). On distribution of generalized order statistics. Statistics, Vol. 35: 269-280.

Kim, C. and Han, K. (2009). Estimation of the scale parameter of the Rayleigh distribution under general progressive censoring. Journal of the Korean Statistical Society. Vol. 38(3): 239-246**.**

Kim, C., Jung, J. and Chung, Y. (2011). Bayesian estimation for the exponentiated Weibull model under type-II progressive censoring. Statistical Papers, Vol. 52, 1: 53-57.

Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003). The Stress-Strength Model and its Generalizations - Theory and Applications. World Scientific, New York

Kumar, S., Mahapatra, A. K. and Vellaisamy, P. (2009). Reliability estimation of the selected exponential populations. Statistics and Probability Letters. Vol. 79(11): 1372-1377.

Kundu, D. and Gupta, R. D. (2008). Generalized exponential distribution: Bayesian estimations. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 52: 1873-1883.

Kundu, D. and Raqab, M.Z. (2009). Estimation of $R= P(Y < X)$ for three parameter Weibull distribution**.** Statistics and Probability Letters, Vol. 79: 1839-1846

Krishnamoorthy, K. and Lin, Y. (2010). Confidence limits for stress–strength reliability involving Weibull models. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 140: 1754-1764.

Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998). Theory of point estimation. Springer-Verlag, New York, Inc.

Lindley, D. V. (1980). Approximate Bayesian method. Trabajos de Estadistica, Vol. 31: 223 - 237.

Longford, N. T. (2009). Inference with the lognormal distribution. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 139: 2329-2340.

Madi, M. T. and Raqab, M. Z. (2009). Bayesian analysis for the generalized exponential distribution using progressively censored data. 27th European Meeting of Statisticians. July 20-24, 2009. Toulouse, France.

Malinowska, I., Pawlas, P. and Szynal, D. (2006). Estimation of location and scale parameters for the Burr-XII distribution using generalized order statistics. Linear Algebra and its Applications, Vol. 417: 150-162.

Marks, N. B. (2005). Estimation of Weibull parameters from common percentiles. Journal of Applied Statistics, Vol. 32: 17-24.

Mudholkar, G. S. and Huston, A. D. (1996). The exponentiated Weibull family: Some properties and a flood data application. Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol. 25: 3059-3083.

Mudholkar, G. S. and Kollia, G. D. (1994). Generalized Weibull family: A structural analysis. Communications in Statistics- Theory and Methods, Vol. 23: 1149-1171.

Mudholkar, G. S. and Srivastava, D. K. (1993). Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. IEEE Transaction on Reliability, Vol. 42: 99-302.

Mudholkar, G.S., Srivastava and D.K., Friemer, M. (1995). The exponentiated Weibull family: a reanalysis of the Bus Motor – failure Data. Technometrics, Vol. 37(4): 436–445.

Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006). The exponentiated type distribution. Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 92: 97-111.

Nassar, M. M. and Eissa, F. H. (2003). On the exponentiated Weibull distribution. Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol. 32: 1317- 1336.

Nassar, M. M. and Eissa, F. H. (2004). Bayesian estimation for the exponentiated Weibull model. Communication in Statistics- Theory and Methods, Vol. 33: 2343- 2362.

Nevzorov, V. B. (1987). Records. Theory Probab. Appl. Vol. 32: 201-228.

Ng, H. K. T. (2005). Parameter estimation for a modified Weibull distribution for progressively type-II censored samples. IEEE Transaction on Reliability, Vol. 54: 374-380.

Nichols, M.D., and W.J. Padgett, W.J. (2006). A bootstrap control chart for Weibull percentiles. Quality and Reliability Engineering International, Vol. 22: 141-151.

Pal, M., Ali, M.M. and Woo, J. (2006). Exponentiated Weibull distribution. Statistica,Vol. LXVI(2): 139- 147.

Pfeifer, D. (1982a). Characterizations of exponential distributions by independent non-stationary record increments. Journal of Applied Probability, Vol. 19: 127-135; Correction: 19,906.

Pfeifer, D. (1982b). The structure of elementary pure birth processes. Journal of Applied Probability, Vol. 19: 664-667.

Raqab, M. Z. (2009). Distribution-free prediction intervals for the future current record statistics. Statistical Papers, Vol. 50: 429-439.

Raqab, M.Z., Madi, M.T. and Kundu, D. (2008). Estimation of P(Y<X) for the three Parameter generalized exponential distribution. Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol. 37: 2854–2864.

Ren, C., Sun, D. and Dey, D.k. (2006). Bayesian and frequentist estimation and prediction for exponential distributions. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 136: 2873-2897.

Retzer, J. J., Soofi, E. S. and Soyer, R. (2009). Information importance of predictors: Concept, measures, Bayesian inference, and applications. Computational Statistical and Data Analysis, Vol. 53: 2363-2377.

Singh, U., Gupta, P. K. and Upadhyay, S. (2002). Estimation of exponentiated Weibull shape parameter under linex loss function. Communications in Statistics-Simulation and Computation, Vol. 31: 523-537.

Singh, U., Gupta, P. K. and Upadhyay, S. (2005a). Estimation of three- parameter exponentiated-Weibull distribution under type-II censoring. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 134: 350-372.

Singh U, Gupta, P. K. and Upadhyay, S. (2005b). Estimation of parameters for exponentiated- Weibull family under type-II censoring scheme. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 48: 509-523.

Soliman, A. A. (2005). Estimation of parameters of life from progressively censored data using Burr- XII model. IEEE Transaction on Reliability, Vol. 54: 34-42.

Soliman, A. A. (2006). Estimators for the finite mixture of Rayleigh model based on progressively censored data. Communication in Statistics - Theory and Methods, Vol. 35: 803-820.

Soliman, A. A., Abd – Ellah, A. H. and Sultan, K. S. (2006). Comparison of estimates using record statistics from Weibull model: Bayesian and non-Bayesian approaches. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 51: 2065-2077.

Soliman, A. A. and AL–Aboud, F. M. (2008). Bayesian inference using record values from Rayleigh model with application. European Journal of Operational Research, Vol. 185: 659-672.

Soliman, A. A., AL-Kahlout, G. R. (2006). Bayes estimation of the Logistic distribution based on progressively censored samples. Journal Applied Statistics Science, Vol. 14: 281-293.

Sultan, K. S., AL-Dayian, G. R. and Mohammad, H. H. (2008). Estimation and prediction from Gamma distribution based on record values. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 52: 1430-1440.

Tierney, L. and Kadane, J.B. (1986). Accurate approximations for posterior moments and marginal densities. Journal of the American Statistical Association, Vol. 81: 82-86.

Upadhyaya, S.K. and Guptab, A. (2010). A Bayes analysis of modified Weibull distribution via Markov chain Monte Carlo simulation. Journal of Statistical Computation and Simulation. Vol. 80(3): 241-254.

Varian, H.R. (1975). A Bayesian approach to real estate assessment. In Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honer of Leonard J. Savage, Amsterdam, North Holland : 195-208.

Wong, A. C. M. and Wu, Y. Y. (2009). A note on interval estimation of P(X<Y) using lower record data from the generalized exponential distribution. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 53(10): 3650-3658.

Zellner, A. (1986). Bayesian Estimation and Prediction Using Asymmetric loss function. Journal of the American Statistical Association, Vol. 81: 446-451.

Zellner, A. (1994). Bayesian and non-Bayesian estimation using balanced loss functions. In: Berger, J.O., Gupta, S.S.(Eds.), Statistical Decision Theory and Methods. Springer, NewYork: 337-390.

Abstract

Kamps (1995a) introduced the concept of generalized order statistics to unify several concepts that have been used in statistics such as ordinary order statistics, record values, sequential order statistics, Pfeifer's record model and progressive censored samples.

The exponentiated Weibull distribution is one of the most important distributions in both theoretical and practical grounds, especially, in the engineering and electrical studies.

Statistical estimation used to obtain some estimators, (either point or interval), for the unknown population parameters based on some given data from the same population. On the other hand, statistical prediction used to obtain some estimates ,(either point or interval), for future "unobserved" data based on informative data from the same population.

The main purpose of the Thesis is to obtain statistical estimation and prediction for the exponentiated Weibull distribution based on generalized order statistics. The Markov chain Monte Carlo (MCMC) method is used for the needed numerical computations. So, The maximum likelihood and Bayes techniques for estimating the parameters, reliability, hazard rate functions and the reliabilities of the stress-strength models $S_1 = P(Y < X)$ and $S_2 = P(X < Y < Z)$ of the exponentiated Weibull model are made based on generalized order statistics. Also, prediction bounds based on one-sample and two-sample prediction techniques for future generalized order statistic from the exponentiated Weibull model are obtained by using the maximum likelihood and Bayes methods. The symmetric and asymmetric loss functions are used under two types of priors (informative and non-informative) for the two shape parameters of the model. The results are specialized to the progressive type-II censored samples and lower record values. An example of real data is considered. The MCMC technique is used for the computations and the Monte Carlo simulation study is used to compare the different estimates.

Generalized Order Statistics from the Exponentiated Weibull Model and Associated Inference

By Mashail Masaud Saud Al- Sobhi Al- Harbi
M.Sc. in Mathematical Statistics – Faculty of Applied Science – Umm Al- Qura University

A thesis submitted for the requirements of the degree of Doctor of Philosophy in Science (Mathematical Statistics)

Supervised By

Prof. Dr. Gannat Ramadan AL- Dayian
Professor of Mathematical Statistics - Faculty of Science - King Abdul Aziz University

Prof. Dr. Zeinhum Fekri Jaheen
Professor of Mathematical Statistics - Faculty of Science - King Abdul Aziz University

FACULTY OF SCIENCE FOR GIRLS
KING ABDULAZIZ UNIVERSITY
JEDDAH – SAUDI ARABIA
Rajab 1432 H – June 2011G